UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1998/99

April 1999

MAT 363/461 - Pentaabiran Statistik

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1.(a) Andaikan $X_i \sim N(i, i^2)$, $i = 1, 2, 3$ dengan X_1, X_2 dan X_3 tak bersandar. Dengan menggunakan pembolehubah rawak X_1, X_2 dan X_3, beri satu contoh statistik yang mempunyai

(i) taburan normal piawai (ii) taburan khi kuasa dua dengan 3 darjah kebebasan
(iii) taburan-t dengan 2 darjah kebebasan (iv) taburan F dengan 1 dan 2 darjah kebebasan.

(40/100)

(b) Biarkan $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ menandai jujukan pembolehubah rawak yang berkeadaan X_n mempunyai fungsi taburan F_n dan fungsi ketumpatan f_n. Cari taburan penghad pembolehubah rawak X_n, sekiranya wujud, apabila

(i) $X_n \sim N\left(1 - \frac{1}{n},\ n\right)$ (ii) $f_n(n) = \left(x - \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} I_{(0,n)}(x)$

(30/100)

(c) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak daripada taburan gamma(r, λ) yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x), \quad r,\ \lambda > 0.$$

(i) Cari taburan $\overline{X}_n$ dengan menggunakan teknik fungsi penjana momen.

(ii) Jika $M_n(t)$ fungsi penjana momen $\overline{X}_n$, tunjukkan bahawa $\overline{X}_n$ menumpu secara kebarangkalian kepada $\frac{r}{\lambda}$ dengan mencari $\underset{n\to\infty}{had}\ M_n(t)$.

(iii) Nyatakan taburan asimptot $\overline{X}_n$.

(30/100)

2.(a) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak daripada taburan binomial dengan kedua-dua parameternya, n dan p, tidak diketahui. Cari penganggar kaedah momen bagi n dan p.

(20/100)

...2/-

(b) Biarkan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ menandai sampel rawak daripada taburan Bernoulli dengan parameter $\theta,\ 0 \le \theta \le 1$.

(i) Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

(ii) Tunjukkan bahawa

$$\frac{1}{n-1}\sum X_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X}^2$$

ialah penganggar saksama bagi $\theta(1-\theta)$.

(iii) Cari batas bawah Cramér-Rao bagi varians penganggar-penganggar saksama $\theta(1-\theta)$.

(55/100)

(c) Jika $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak daripada taburan eksponen dengan fungsi ketumpatan

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}\, I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 0$$

cari penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi

(i) $1/\theta$

(ii) median taburan

(25/100)

3.(a) Cari statistik cukup dan lengkap bagi setiap taburan berikut:

(i) $f(x;\theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}\, I_{(0,\infty)}(x); \quad \theta > 1$.

(ii) $f(x;\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-x^2/2\theta}\, I_{(-\infty,\infty)}(x); \quad \theta > 0$.

(iii) $f(x;\theta) = \dfrac{1}{\theta} e^{-x/\theta}\, I_{(0,\infty)}(x); \quad \theta > 0$.

(30/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ merupakan sampel rawak daripada taburan seragam pada selang $(-\theta,\ \theta)$ dengan fungsi ketumpatan

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta} I_{(-\theta,\theta)}(x); \quad \theta > 0.$$

(i) Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

(ii) Dapatkan statistik cukup bagi taburan ini.

(35/100)

(c) Pertimbangkan famili fungsi ketumpatan berikut:

$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}\, I_{(\theta,\infty)}(x), \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Bagi tujuan menganggar θ, sampel rawak saiz n diambil daripada taburan sedemikian.

(i) Jika $Y_1 = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, tunjukkan bahawa Y_1 ialah penganggar konsisten bagi θ dengan mencari had fungsi taburan G_1 bagi Y_1 apabila $n \to \infty$.

(ii) Tunjukkan bahawa $W = n(Y_1 - \theta)$ mempunyai taburan eksponen dengan parameter $\lambda = 1$.

(35/100)

...3/-

4.(a) Andaikan X_1, X_2 sampel rawak saiz 2 daripada taburan $N(\theta,1)$ dan biarkan $Y_1 < Y_2$ menandai statistik tertib yang sepadan.

(i) Jika (Y_1, Y_2) selang keyakinan bagi θ, cari pekali keyakinannya, γ.
[Petua: Mula-mula dapatkan fungsi ketumpatan tercantum bagi Y_1 dan Y_2.]

(ii) Kira jangkaan panjang selang keyakinan di atas.
[Petua: $U = Y_n - Y_1$ mempunyai fungsi ketumpatan $h(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2/4} I_{(0,\infty)}(u)$.]

(40/100)

(b) Pertimbangkan sampel rawak saiz 30 $X_1, X_2, \cdots, X_{30}$ daripada taburan $\text{beta}(\theta, 1)$ dengan fungsi ketumpatan $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0$.

(i) Tunjukkan bahawa pembolehubah rawak $Y = -\log X$ mempunyai taburan gamma $(1, \theta)$.

(ii) Takrifkan $Q = \sum_{i=1}^{30} Y_i$. Dengan menggunakan teknik fungsi penjana momen, cari taburan Q dan seterusnya tunjukkan bahawa $2\theta Q$ ialah suatu kuantiti pangsian.

(iii) Terbitkan selang keyakinan 95% bagi θ *dan* selang keyakinan *hampiran* 95% bagi θ. Bandingkan kedua-dua selang keyakinan dengan mencari panjang setiap satu.

(60/100)

5.(a) Andaikan X suatu cerapan *tunggal* daripada taburan yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x;\theta) = (2\theta x + 1 - \theta)\, I_{(0,1)}(x); \quad -1 \le \theta \le 1.$$

(i) Cari ujian paling berkuasa bersaiz $\alpha = 0.05$ bagi menguji $H_0 : \theta = 1$ lawan $H_1 : \theta = 0$.

(ii) Bagi menguji $H_0 : \theta \le 1$ lawan $H_1 : \theta > 1$, ujian berikut digunakan:

Tolak H_0 jika dan hanya jika $X \ge \frac{1}{2}$.

Cari fungsi kuasa dan saiz ujian tersebut.

(50/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak saiz n daripada taburan Poisson yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x;\theta) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!} I_{\{0,1,2,\cdots\}}(x),$$

(i) Cari ujian paling berkuasa bersaiz $\alpha = 0.05$ bagi menguji $H_0 : \theta = 1$ lawan $H_1 : \theta > 1$. Biarkan $n = 25$ dan gunakan teorem had memusat.

(ii) Satu ujian bagi menguji $H_0 : \theta = \theta_0$ lawan $H_1 : \theta \ne \theta_0$ diberikan seperti berikut:

Tolak H_0 jika dan hanya jika $\left| \overline{X} - \theta_0 \right| \ge k$.

Sekiranya $n = 100$ dan $\alpha = 0.05$, cari nilai k.

(50/100)

-oooOooo-