

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1998/99

April 1999

MAT 362/4 - Teori Kebarangkalian

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

1.(a) Sebuah bakul mengandungi 6 biji bola yang diwarnakan biru dan 2 biji bola yang diwarnakan merah. Sebiji bola diambil dari bakul tersebut dan kemudian diletakkan semula ke dalam bakul itu.

- (i) Dapatkan kebarangkalian 2 biji bola merah diperoleh jika 4 pengambilan telah dibuat.
- (ii) Apakah kebarangkalian bola merah kedua akan diperoleh pada pengambilan keempat?
- (iii) Berapakah pengambilan yang diperlukan supaya kebarangkalian memperoleh sekurang-kurangnya sebiji bola merah ialah 0.90?

(30/100)

(b) Satu pembolehubah rawak X mempunyai fungsi taburan berikut:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, & x \leq 0 \\ &= \frac{x^2}{8}, & 0 < x \leq 2 \\ &= x - \frac{x^2}{8} - 1, & 2 < x \leq 4 \\ &= 1, & 4 < x \end{aligned}$$

- (i) Dapatkan f.k.k. bagi X .
- (ii) Hitung $P(1 < X < 5)$ dan $P(X \geq 3)$.
- (iii) Dapatkan nilai min dan median bagi taburan X .

(40/100)

(c) Andaikan X dan Y mempunyai f.k.k. tercantum

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 12xy(1-y), & 0 < x < 1, & 0 < y < 1 \\ &= 0, & \text{di tempat lain.} \end{aligned}$$

Dapatkan f.k.k. sut bagi X dan Y . Adakah X dan Y tak bersandar?

(30/100)

...2/-

- 2.(a) Andaikan X sebagai masa hayat (dalam sukatan jam) bagi sejenis alat elektronik dan f.k.k. bagi X ialah

$$f(x) = \frac{10}{x^2}, \quad x > 10$$

$$= 0, \quad x \leq 10$$

- (i) Dapatkan $P(X \geq 15)$.
- (ii) Dapatkan fungsi taburan bagi X .
- (iii) Dapatkan kebarangkalian bahawa 3 daripada 6 alat tersebut boleh berfungsi selama sekurang-kurangnya 15 jam.

(30/100)

- (b) Andaikan bahawa f.k.k. tercantum bagi X dan Y dijadualkan seperti berikut:

$X \backslash Y$	1	2
1	0.5	0.1
2	0.1	0.3

- (i) Dapatkan satu jadual f.k.k. sut bagi Y .
- (ii) Hitung $P(XY \leq 3)$ dan $P(X + Y > 2)$
- (iii) Hitung $P(X = 1 | Y = 1)$.

(30/100)

- (c) Andaikan X_1 dan X_2 sebagai dua pembolehubah rawak tak bersandar, masing-masing dengan min μ_1 dan μ_2 dan varians σ_1^2 dan σ_2^2 .

- (i) Dapatkan min dan varians bagi $Y = X_1 X_2$.
- (ii) Jika $Y = X_1 + X_2$, $\mu_1 = \mu_2 = \frac{7}{2}$ dan $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \frac{35}{12}$, dapatkan $E(Y)$ dan $Var(Y)$.
- (iii) Jika X_1 dan X_2 mempunyai f.k.k. yang sama, iaitu, $f(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1, 2, \dots, 6$, dapatkan fungsi penjana momen bagi $Y = X_1 + X_2$.

(40/100)

- 3.(a) Andaikan X mempunyai taburan $Bin(n, p)$. Tunjukkan bahawa

$$E\left[\frac{X}{n}\right] = p \quad \text{dan} \quad E\left[\left(\frac{X}{n} - p\right)^2\right] = \frac{p(1-p)}{n}.$$

(25/100)

- (b) Jika f.k.k. bagi X ialah

$$f(x) = 2xe^{-x^2}, \quad 0 < x < \infty$$

$$= 0, \quad \text{di tempat lain,}$$

dapatkan f.k.k. bagi $Y = X^2$ dengan menggunakan teknik fungsi taburan.

(25/100)

...3/-

(c) Andaikan

$$f(x_1|x_2) = c_1 \frac{x_1^2}{x_2^2}, \quad 0 < x_1 < x_2, \quad 0 < x_2 < 1$$

$$= 0, \quad \text{di tempat lain}$$

menandakan f.k.k. bersyarat bagi X_1 diberikan $X_2 = x_2$, dan

$$f(x_2) = c_2 x_2^4, \quad 0 < x_2 < 1$$

$$= 0, \quad \text{di tempat lain}$$

menandakan f.k.k. sut bagi X_2 .

- (i) Dapatkan nilai bagi c_1 dan c_2
- (ii) Dapatkan f.k.k. tercantum bagi X_1 dan X_2 .
- (iii) Hitung $P\left(\frac{1}{4} < X_1 < \frac{1}{2} \mid X_2 = \frac{5}{8}\right)$ dan $P\left(\frac{1}{4} < X_1 < \frac{1}{2}\right)$.

(50/100)

4.(a) Andaikan X_1 dan X_2 sebagai dua pembolehubah rawak tak bersandar yang tertabur secara normal piawai yang diberikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Jika $Y_1 = X_1 + X_2$ dan $Y_2 = X_1 - X_2$, dapatkan f.k.k. tercantum bagi Y_1 dan Y_2 dan tunjukkan bahawa Y_1 dan Y_2 adalah tak bersandar.

(35/100)

(b) Andaikan X_1 dan X_2 pembolehubah rawak tak bersandar yang mempunyai taburan seragam pada selang (0, 1). Dapatkan f.k.k. bagi $U = \frac{X_1}{X_2}$. Andaikan $V = X_2$.

(40/100)

(c) Andaikan X dan Y sebagai dua pembolehubah rawak yang tertabur secara seragam dan tak bersandar. Taburan bagi setiap pembolehubah rawak tersebut mempunyai fungsi penjana momen

$$m(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}, \quad \alpha > 0.$$

- (i) Dapatkan fungsi penjana momen bagi $T = X + Y$.
- (ii) Dapatkan fungsi penjana momen bagi $U = 2X$.

(25/100)

-ooo0ooo-