UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1994/95

April 1995

MAT 361- Pentaabiran Statistik

[Masa: 3 Jam]

Jawab **SEMUA** soalan. Soalan-soalan MESTI dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Katakan $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ ialah statistik tertib bagi n pembolehubah rawak tak bersandar $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dengan f.k.k. sepunya:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } 0 < x < 1 \, , \\ 0 & \text{di tempat lain} \, . \end{cases}$$

Biarkan $\quad Y_1 = X_{(1)}/X_{(2)} \, , \; Y_1 = X_{(2)}/X_{(3)} \, , \ldots ,$

$$Y_{n-1} = X_{(n-1)}/X_{(n)} \, , \text{ dan } Y_n = X_{(n)} \, .$$

Dapatkan fungsi ketumpatan tercantum bagi $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Adakah $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ tak bersandar?

(50/100)

(b) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pembolehubah rawak tak bersandar yang bertaburan semacam dengan f.k.k. berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^5} \, , & x \geq 1 \\ 0 \, , & x < 1 \end{cases}$$

Cari nilai hampiran bagi:

(i) $P\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_{200} \leq 270\right)$

(ii) $P\left(X_1^{\frac{1}{2}} + X_2^{\frac{1}{2}} + \ldots + X_{100}^{\frac{1}{2}} \leq 115\right)$

(50/100)

2. (a) Tuliskan nota pendek bagi setiap sebutan berikut:

(i) statistik cukup
(ii) kelengkapan bagi suatu famili taburan

(30/100)

(b) Terangkan mengapa Kriterium Pemfaktoran Neyman-Fisher penting.

(10/100)

(c) Katakan X mengambil nilai-nilai 0, 1, dan 2 dengan kebarangkalian $P_\theta(1)$, $P_\theta(2)$, dan $P_\theta(3)$ masing-masing. Bagi setiap daripada dua kes berikut, tentukan sama ada X lengkap atau tidak:

(i) $P_\theta(0)=\theta,\ P_\theta(1)=2\theta,\ P_\theta(2)=1-3\theta,\ 0<\theta<\frac{1}{3}$

(ii) $P_\theta(0)=\theta,\ P_\theta(1)=\theta^2,\ P_\theta(2)=1-\theta-\theta^2,\ 0<\theta<\frac{1}{2}$

(30/100)

(d) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan normal $N(0, \sigma^2)$, $0<\sigma^2<\infty$.

Tunjukkan bahawa $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ ialah suatu statistik cukup dan lengkap bagi σ^2

(30/100)

3. (a) Bincangkan peranan teorem-teorem berikut:

(i) Teorem Rao-Blackwell,
(ii) Teorem Lehmann-Scheffe, dan
(iii) Ketaksamaan Cramer-Rao,

di dalam teori penganggaran. Berikan contoh-contoh.

(40/100)

(b) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ialah pembolehubah rawak tak bersandar yang mempunyai taburan binomial sepunya dengan parameter-parameter m dan p, $0<p<1$.

(i) Dapatkan f.k.k. bagi $X_1+X_2+\ldots+X_n$.

(ii) Dapatkan f.k.k. bersyarat bagi X_1 diberikan $X_1+X_2+\ldots+X_n$.

(iii) Tunjukkan bahawa $X_1+X_2+\ldots+X_n$ ialah suatu statistik cukup dan lengkap bagi p.

(iv) Katakan $W = \begin{cases} 0 \text{ jika } X_1 \neq 0 \\ 1 \text{ jika } X_1 = 0 . \end{cases}$

Tunjukkan bahawa W ialah saksama bagi $(1-p)^m$. Demikian, dapatkan penganggar saksama bervarians minimum secara seragam bagi $(1-p)^m$.

(60/100)

4. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ialah suatu sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\ \theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

(40/100)

(b) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ialah suatu sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\ \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-1}}{(n-1)!}, & x > 0,\ \lambda > 0 . \\ 0 & \text{di tempat lain} . \end{cases}$$

Cari batas bawah Cramer-Rao bagi varians penganggar saksama untuk

(i) λ , dan (ii) $1/\lambda$.

(40/100)

(c) Berikan takrif bagi sebutan-sebutan berikut:

(i) selang keyakinan bagi θ , dan

(ii) kuantiti pangsi.

(20/100)

5. (a) Nyatakan Lema Asasi Neyman-Pearson.

(10/100)

(b) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\, e^{-x^2/2\theta}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \theta > 0\,.$$

Cari ujian paling berkuasa secara seragam bersaiz α untuk menguji $H_o : \theta = \theta_o$ lawan $H_1 : \theta > \theta_o$.

(40/100)

(c) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_m$ dan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ialah sampel-sampel rawak tak bersandar daripada $N(\tau_1, \sigma_1^2)$ dan $N(\tau_2, \sigma_2^2)$, masing-masing.

Cari ujian nisbah kebolehjadian bagi H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ lawan H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

(50/100)

Taburan	Fungsi Ketumpatan *f*	Min $\mu - E[X]$	Varians $\sigma^2 - E\left[(x-\mu)^2\right]$	Fungsi penjana Momen
Seragam Diskrit	$f(x)=\frac{1}{N}I_{\{1,2,\ldots,N\}}(x)$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N}e^{jt}$
Bernoulli	$f(x)=p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	p	pq	$q+pe^t$
Binomial	$f(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$	np	npq	$(q+pe^t)^n$
Geometri	$f(x)=pq^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1-qe^t}$
Poisson	$f(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t-1)\}$
Seragam	$f(x)=\frac{1}{b-a}I_{(a,b)}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(h-a)^t}$
Normal	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2x}}\exp\left\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right\}I_{(-\infty,\infty)}(x)$	μ	σ^2	$\exp\left\{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$
Eksponen	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$, $t<\lambda$
Gamma	$f(x)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}e^{-\lambda x}x^{n-1}I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$, $t<\lambda$
Khi kuasa dua	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{r/2}\frac{1}{\Gamma(r/2)}e^{-x/2}x^{(r/2)-1}I_{(0,\infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}$, $t<\frac{1}{2}$
Beta	$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}I_{(0,1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	-

LAMPIRAN-2

Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel rawak daripada taburan *F(x)* dengan f.k.k. f(x). Andaikan p.r. X_i adalah selanjar.

Biarkan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ialah statistik tertib bagi sampel ini, iaitu, $Y_i = X_{(i)},\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Maka:

(i) f.k.k. tercantum bagi $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ialah $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n!\, f(y_1), f(y_2) \ldots f(y_n),\ y_1 < y_2 < \ldots < y_n$.

(ii) f.k.k. bagi Y_k ialah $g_k(y_k) = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(y_k)]^{k-1} [1-F(y_k)]^{n-k} f(y_k)$.

(iii) f.k.k. tercantum bagi Y_i dan Y_j; $i < j$, ialah

$$g_{ij}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} [F(y_i)]^{i-1} [F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1} [1-F(y_j)]^{n-j} f(y_i) f(y_j),\ y_i < y_j .$$