

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama  
Sidang Akademik 1999/2000

September 1999

MAT 263 – Teori Kebarangkalian

Masa: [3 jam]

---

**ARAHAN KEPADA CALON:**

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Pekali dalam persamaan  $ax^2 + bx + c = 0$  ditentukan dengan melemparkan sebuah dadu adil. Carilah kebarangkalian persamaan itu mempunyai punca-punca nyata.

(40/100)

- (b) Andaikan  $A$ ,  $B$  dan  $C$  sebagai 3 peristiwa dan  $P(A|C) \geq P(B|C)$  dan  $P(A|C') \geq P(B|C')$ . Tunjukkan bahawa  $P(A) \geq P(B)$ .

(20/100)

- (c) Suatu p.u.r. mempunyai f.k.k. seperti berikut:

$$f(x) = \begin{cases} c(4x^2 - 3), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

- (i) Dapatkan nilai  $c$ .  
(ii) Dapatkan suatu fungsi taburan bagi  $x$  dan lakarkan fungsi ini.  
(iii) Dapatkan  $P(\frac{1}{4} < X < 1.5)$   
(iv) Dapatkan nilai  $k$  supaya  $P(X \geq k) = 0.4$

(40/100)

2. (a) Fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum bagi pembolehubah  $X$  dan  $Y$  diberi oleh

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left[-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)\right], -\infty < x, y < \infty$$

Carilah pekali korelasi  $\rho_{xy}$ .

(30/100)

...2/-

- (b) Andaikan p.u.r.  $X$  dan  $Y$  mempunyai f.k.k. tercantum

$$f(x, y) = \frac{4(x+y)}{5(x^3)}, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 1 \leq x < \infty$$

- (i) Carilah  $P(0 < Y < \frac{1}{2} | X = 2)$ .  
 (ii) Apakah nilai  $k$  supaya  $P(0 < Y < \frac{1}{2} | X > k) = \frac{5}{16}$ ?

(40/100)

- (c) Sebuah kotak mengandungi 4 biji bola bernombor 1, 2, 3 dan 4. Sebiji demi sebiji bola diambil tanpa penggantian sehingga bola bernombor 1 diperolehi. Andaikan  $X$  menandakan bilangan pengambilan yang dilakukan. Dapatkan satu jadual taburan kebarangkalian bagi  $X$ .

(30/100)

3. (a) Andaikan f.k.k. tercantum p.u.r.  $X$  dan  $Y$  diberi oleh

$$f(x, y) = \begin{cases} 4y(x-y)e^{-(x+y)} & , \quad 0 < x < \infty \\ & , \quad 0 \leq y \leq x \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain} \end{cases}$$

- (i) Carilah f.k.k. bersyarat  $Y$  diberi  $X = x$ .  
 (ii) Kirakan  $E[Y | X = x]$ .

(40/100)

- (b) Andaikan  $X$  dan  $Y$  masing-masing merupakan p.u.r. Gamma tak bersandar dengan parameter  $(\alpha, \lambda)$  dan  $(\beta, \lambda)$ .

- (i) Tentukan f.k.k. tercantum bagi  $U = X + Y$  dan  $V = X/(X + Y)$ .  
 (ii) Kirakan f.k.k. sut bagi  $X$  dan juga  $Y$ .

(45/100)

- (c) Andaikan  $X$  sebagai suatu p.u.r. dengan min  $\mu$  dan varians  $\sigma^2$ . Tunjukkan untuk sebarang nombor positif  $k$ ,

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

(15/100)

...3/-

4. (a) Pembolehubah rawak bivariat normal  $(X, Y)$  mempunyai f.k.k.

$$f(x, y) = \exp\left\{-\frac{1}{2}h(x, y)\right\} / \left\{2\pi\sigma_X\sigma_Y(1-\rho_{XY}^2)^{1/2}\right\}$$

di mana

$$h(x, y) = \frac{1}{(1-\rho_{XY}^2)} \left[ \frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho_{XY}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} \right]$$

- (i) Carilah fungsi ketumpatan bersyarat bagi  $Y$  diberi  $X$ .  
(ii) Tunjukkan min bersyarat bagi  $Y$  diberi  $X = x_1$  ialah

$$\mu_Y + \rho_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x_1 - \mu_X)$$

(65/100)

- (b) Andaikan p.u.r.  $X$  mempunyai fungsi taburan

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } x < 0 \\ (4x - x^2)/8 & , \text{ jika } 0 \leq x < 2 \\ 1 + (x^2 - 4x)/8 & , \text{ jika } 2 \leq x < 4 \\ 1 & , \text{ jika } x \geq 4 \end{cases}$$

- (i) Carilah f.k.k. bagi  $X$  dan lakarkan grafnya.  
(ii) Kirakan  $P(X \leq 1)$ , dan  $P(1.2 \leq X \leq 3.2)$ .

(35/100)

5. (a) Andaikan  $x$  sebagai p.u.r. Poisson dengan parameter  $\lambda$ , yakni,

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

- (i) Kirakan fungsi penjana momen bagi  $X$ .  
(ii) Andaikan  $X_1$  dan  $X_2$  merupakan p.u.r. Poisson tak bersandar di mana  $X_1 \sim P_{oi}(\lambda_1)$  dan  $X_2 \sim P_{oi}(\lambda_2)$ . Apakah taburan  $X_1 + X_2$ ?  
(iii) Andaikan bilangan panggilan yang diterima di sebuah ibusawat telefon antara jam 9:00 pagi hingga 10:00 pagi, ialah p.u.r. Poisson dengan parameter 5. Begitu juga, bilangan panggilan yang diterima jam 10:00 pagi hingga 11:00 pagi adalah p.u.r. Poisson dengan parameter 4. Jika bilangan panggilan yang diterima dalam kedua-dua selang masa itu tak bersandar, berapakah kebarangkalian ibusawat itu menerima lebih daripada 6 panggilan dari pukul 9:00 pagi hingga 11:00 pagi?

(40/100)

...4/-

- (b) Pertimbangkan fungsi kebarangkalian tercantum p.u.r.  $(X, Y)$  berikut:

$x \backslash y$	1	2	3
4	0.19	0.09	0.03
5	0.16	0.21	0.05
6	0.15	0.08	0.04

- (i) Carilah  $P(X + Y \leq 8)$  ,  $P(X + Y > 7)$   
(ii)  $P(X = 3 | Y = 5)$  dan  $P(Y = 5 | X = 3)$ .

(35/100)

- (c) Sebuah kotak mengandungi  $u$  bola merah dan  $v$  bola biru. Sebiji bola dipilih secara rawak dan warnanya diamati. Bola itu dimasukkan semula ke dalam kotak asal dan kemudian  $k$  biji bola yang warna sama dengan bola tadi ditambah ke dalam kotak itu. Setiap kali bola diambil dari kotak itu proses yang sama dilakukan. Jika 4 biji bola dipilih secara rawak, apakah kebarangkalian bahawa tiga bola pertama adalah merah dan bola keempat ialah biru?

(25/100)

- ooo0ooo -