

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1994/945

April 1995

MAT 261 - Teori Kebarangkalian I

Masa : [3 jam]

Jawab Semua Soalan.

1. (a) Sebuah kotak mengandungi 6 biji bola berwarna putih dan 2 biji bola berwarna hitam. Sebiji bola diambil dari kotak tersebut dan kemudian diletakkan semula ke dalam kotak.
- (i) Dapatkan kebarangkalian 2 biji bola berwarna hitam diperolehi jika 4 pengambilan telah dibuat.
 - (ii) Apakah kebarangkalian bola hitam kedua akan diperolehi pada pengambilan keempat?
 - (iii) Berapakah pengambilan yang diperlukan supaya kebarangkalian memperolehi sekurang-kurangnya sebiji bola hitam ialah 0.90?

(30/100)

- (b) Suatu p.u.r. X mempunyai fungsi taburan berikut:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 & x < 0 \\ &= \frac{x^2}{8} & 0 \leq x \leq 2 \\ &= x - \frac{x^2}{8} - 1, & 2 < x \leq 4 \\ &= 1 & 4 < x \end{aligned}$$

- (i) Dapatkan f.k.k. bagi X .
- (ii) Hitung $P(1 < X < 5)$ dan $P(X \geq 3)$.
- (iii) Dapat nilai min dan penengah bagi taburan X .

(40/100)

... 2/-

- (c) Bagi sebarang dua peristiwa A dan B ,
 tunjukkan $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
 Tunjukkan juga $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

(30/100)

2. (a) Andaikan X sebagai hayat (dalam sukatan jam) bagi sejenis alat elektronik dan f.k.k. bagi X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x^2}, & x > 10 \\ 0 & x \leq 10 \end{cases}$$

Handwritten notes:
 $f(x) = \frac{10}{x^2}$
 $\frac{10 < x}{x^2}$
 $= \frac{10 f(x)}{x^2}$

- (i) Dapatkan $P(X \geq 15)$
 (ii) Dapatkan fungsi taburan bagi X .
 (iii) Dapatkan kebarangkalian bahawa 3 daripada 6 alat tersebut boleh berfungsi selama sekurang-kurangnya 15 jam.

(30/100)

- (b) Andaikan f.k.k. tercantum bagi 2 p.u.r. X dan Y ialah

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{16}(4 - 2x - y), & x > 0, y > 0, 2x + y < 4 \\ 0 & \text{d.t.l.} \end{cases}$$

- (i) Dapatkan f.k.k. sut bagi X dan f.k.k. sut bagi Y .
 (ii) Dapatkan f.k.k. bersyarat bagi Y diberikan X .
 (iii) Dapatkan $P(Y \geq 2 | X = \frac{1}{2})$.

(40/100)

- (c) Andaikan bahawa ukuran tinggi suami isteri tertabur secara normal bivariat dan didapati bahawa ukuran tinggi isteri mempunyai min 66.8 inci dengan sisihan piawai 2 inci, sementara ukuran tinggi suami mempunyai min 70 inci dengan sisihan piawai 2 inci. Korelasi di antara kedua-dua ukuran tinggi ini ialah 0.68. Jika sepasang suami isteri telah dipih secara rawak, apakah kebarangkalian bahawa isteri tersebut adalah lebih tinggi daripada suaminya?

(30/100)

3. (a) Andaikan X sebagai suatu p.u.r. diskrit dengan f.k.k. berikut:

$$f(x) = \frac{k2^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$$
$$= 0 \quad d.t.l.$$

- (i) Dapatkan nilai k .
- (ii) Dapatkan $P(X = 0)$ dan $P(X \geq 2)$.
- (iii) Apakah nilai mod dan median bagi taburan X ini?
- (iv) Lakarkan graf fungsi taburan bagi $0 \leq X \leq 5$.

(40/100)

(b) P.u.r. X dan Y mempunyai f.k.k. tercantum

$$f(x, y) = \frac{xy}{18}, \quad x = 1, 2; y = 1, 2, 3$$
$$= 0 \quad d.t.l.$$

Dengan menggunakan f.k.k. sut bagi X dan Y , tunjukkan bahawa X dan Y adalah tak bersandar. Seterusnya, tunjukkan bahawa $f(x/y) = f(x)$.

(30/100)

(c) Andaikan X dan Y sebagai p.u.r. dengan $0 < \sigma_X^2 < \infty$ dan $0 < \sigma_Y^2 < \infty$. Andaikan bahawa $U = aX + b$ dan $V = cY + d$, dengan $a \neq 0$ dan $c \neq 0$. Tunjukkan $\rho_{UV} = \rho_{XY}$ jika $ac > 0$ dan $\rho_{UV} = -\rho_{XY}$ jika $ac < 0$.

(30/100)

4. (a) Andaikan X dan Y sebagai dua p.u.r. yang tertabur secara secaman dan tak bersandar. Taburan bagi setiap p.u.r. tersebut mempunyai fungsi penjana momen

$$m(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t}, \quad \alpha > 0$$

- (i) Dapatkan fungsi penjana momen bagi $T = X + Y$.
- (ii) Dapatkan fungsi penjana momen bagi $U = 2X$.

- (iii) Jika $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$
 $= 0$ *d.t.l.*

dapatkan f.k.k. bagi T dan f.k.k. bagi U .

(40/100)

- (b) Andaikan X sebagai p.u.r. dengan min μ dan varians σ^2 dan f.p.m. bagi X ditandakan dengan $m_X(t)$, $-\infty < t < \infty$. Andaikan c sebagai satu pemalar positif dan Y sebagai suatu p.u.r. dengan f.p.m.

$$m_Y(t) = e^{c(m_X(t)-1)} , \quad -\infty < t < \infty$$

Dapatkan min dan varians bagi Y dalam sebutan min dan varians X .

(40/100)

- (c) Nyatakan Teorem Had Memusat dan terangkan dengan ringkas kegunaan teorem ini.
(20/100)

5. (a) Andaikan X dan Y tertabur secara secaman dan takbersandar dengan taburan $N(0,1)$.

- (i) Dapatkan f.k.k. tercantum bagi $U = \frac{X}{Y}$ dan $V = |Y|$.

- (ii) Tunjukkan bahawa p.u.r. U mempunyai taburan Cauchy, iaitu

$$f(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)} , \quad -\infty < u < \infty$$

(40/100)

- (b) Andaikan X sebagai suatu p.u.r. selanjar dengan f.k.k. $f_X(x)$ dan fungsi taburan $F_X(x)$.

- (i) Dapatkan fungsi taburan bagi $Y = |X|$ dan seterusnya, tunjukkan bahawa f.k.k.nya ialah

$$g_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) , \quad y \geq 0$$

$= 0$ *d.t.l.*

- (ii) Jika X mempunyai suatu taburan eksponen ganda dua dengan $\theta = 0$ dan $\sigma = 1$,
iaitu

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty,$$

dapatkan taburan bagi $Y = |X|$.

(30/100)

- (c) Andaikan bahawa X dan Y merupakan p.u.r. yang tertabur secara secaman dan tak bersandar dengan taburan seragam dalam selang $(0, \theta)$. Dapatkan f.k.k. tercantum bagi

$$T = X + Y \text{ dan } U = \text{maks}(X, Y)$$

(30/100)

- oooOOooo -

TABURAN NORMAL

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

Note: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000