

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1999/2000

September 1999

MAT 222 – Persamaan Pembezaan II

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. Tunjukkan bahawa persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mempunyai penyelesaian berbentuk

$$u = \sum_{w=1}^{\infty} e^{-w^2 t} (A_w \cos wx + B_w \sin wx)$$

dengan A_n, B_n pemalar-pemalar.

Syarat awal adalah

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2u_0 x}{l} & , \quad 0 \leq x \leq l/2 \\ 0 & , \quad l/2 < x \leq l \end{cases}$$

dan syarat-syarat sempadan ialah

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

u_0 dan l adalah pemalar-pemalar.

Dapatkan bentuk siri Fourier yang memberikan u .

(100 markah)

...2/-

2. (a) Diberi satu jalur semi takterhingga, $y > 0$, $0 < x < a$.

Dapatkan penyelesaian kepada persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

atas jalur ini. Penyelesaian memenuhi syarat-syarat

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad y > 0$$

$$u(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq a$$

dan

$$u(x, y) \rightarrow 0 \text{ apabila } y \rightarrow \infty$$

- (b) Tanpa menyelesaikannya, terangkan dengan ringkas bagaimanakah cara untuk menyelesaikan masalah berikut:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0$$

α pemalar, tertakluk kepada syarat-syarat

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

(100 markah)

3. Pertimbangkan persamaan pembezaan separa berikut:

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0 \quad (*)$$

- (i) Tunjukkan bahawa persamaan ini boleh dikelaskan sebagai persamaan parabola untuk setiap titik atas rantau.
- (ii) Dapatkan persamaan cirian.
- (iii) Tunjukkan bahawa persamaan (*) boleh diturunkan kepada bentuk berkanun $u_{\eta\eta} = 0$ dengan $\eta = \eta(x, y)$ dan dengan ini dapatkan penyelesaian kepada persamaan (*).

(100 markah)

...3/-

4. Diberi satu persamaan haba

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1 \quad (**)$$

dengan syarat-syarat

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = 0 = u(1, t), \quad t > 0$$

- (i) Sahkan bahawa penyelesaian analitik adalah $u = e^{-\pi^2 t} \sin x\pi$.
- (ii) Hitungkan penyelesaian kepada persamaan (**) dengan menggunakan kaedah eksplisit dengan $\delta x = 0.1$ dan $r = 0.1$.
- (iii) Semak kejituan penyelesaian berangka untuk $t = 0.5$.

(100 markah)

5. Selesaikan masalah gelombang tak homogen berikut dengan menggunakan kaedah kembangan fungsi-eigen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0 = u(1, t)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

(100 markah)

- ooo0ooo -