

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1998/99

April 1999

MAT 222 - Persamaan Pembezaan II

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam DUA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

1.(a) Selesaikan persamaan pembezaan

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

dengan syarat awal

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(50 markah)

(b) Cari penyelesaian am bagi sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x_1'' &= 6x_1 + x_2 \\ x_2' &= 6x_1 + x_1' \end{aligned}$$

(50 markah)

2. Bagi sebarang $A \in M_{n \times n}$, takrifkan

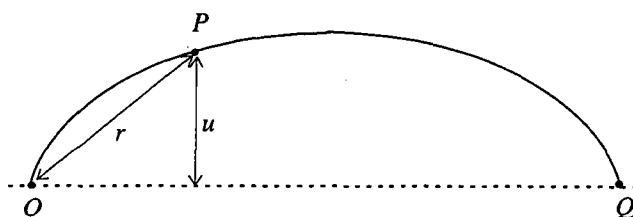
$$e^A = I_n + \text{had}_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \frac{A^i}{i!}.$$

- (i) Cari nilai-nilai eigen λ_1 dan λ_2 bagi matriks $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- (ii) Sekiranya $\lambda_1 > \lambda_2$, cari matriks B supaya $A = B + \lambda_1 I_2$.
- (iii) Tunjukkan bahawa $B^m = (-1)^{m+1} B$.
- (iv) Diberi $e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots$, tunjukkan bahawa $e^{Bt} = I_2 + B(1 - e^{-t})$.
- (v) Nilaikan matriks e^{At} dengan menggunakan keputusan di bahagian (ii) dan (iv).
- (vi) Dengan itu, selesaikan persamaan pembezaan $\underline{x}' = A\underline{x}$ diberi syarat awal $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(100 markah)

...2/-

3.(a)



masa = t

Gambarajah di atas menunjukkan sesaran u bagi suatu titik P yang berjarak r dari titik tetap O . Tali OQ bergetar supaya u hanya bergantung kepada r dan t . Jadi persamaan gelombang yang diwakili ialah $\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) = c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(ru)$; di mana c ialah pemalar.

Tunjukkan bahawa penyelesaian am bagi persamaan pembezaan separa di atas adalah

$$u(r, t) = \frac{1}{r}F(r+ct) + \frac{1}{r}G(r-ct)$$

di mana F dan G adalah fungsi sebarang.

(50 markah)

(b) Gunakan kaedah pemisahan pembolehubah untuk menyelesaikan masalah berikut:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^{-2}u_{xx}, & 0 < x < 1, & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

(50 markah)

4. Cari siri Fourier bagi fungsi

$$f(x) = x^2, \quad -\ell < x < \ell$$

dan tunjukkan bahawa

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

(100 markah)

-ooo0ooo-