

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1994/95

April 1995

MAT 220 - Persamaan Pembezaan I

Masa : [3 Jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak. Jika anda menjawab lebih dari lima soalan, hanya lima soalan yang pertama sahaja yang akan diperiksa.

1. (a) Pertimbangkan masalah nilai awal berikut:

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(x_0) = x_0$$

Tunjukkan bahawa penyelesaian boleh ditulis seperti:

$$\int_{x_0}^x M(t) dt + \int_{y_0}^y N(t) dt = 0$$

Dengan ini, selesaikan masalah nilai awal berikut:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+2y}, \quad y(2) = 0$$

- (b) Persamaan logistik untuk perkembangan populasi boleh ditulis seperti:

$$\frac{dy}{dx} = \epsilon y - \sigma y^2, \quad y(0) = y_0$$

di mana ϵ dan σ pemalar-pemalar. Andaikan penyelesaian ditulis seperti $y = \eta(t)$.
Tunjukkan bahawa persamaan ini mempunyai ciri-ciri:

(i) $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \frac{\epsilon}{\sigma}$ if $y_0 > 0$

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = 0$ if $y_0 = 0$

- (c) Ali, seorang peminum teh yang cerewet, selalu hendak tehnya di bancuh pada suhu 190°F . Dia sering lupa dan membiarkan air mendidih. Selepas termometernya pecah, dia tanya anda, berapa lamakah perlu dia tunggu sebelum air mendidih (212°F) sejuk ke 190°F . Bolehkah anda bantu dia? Jika ya, dapatkan masa tersebut. Jika tidak, terangkan mengapa.

2. (a) Tunjukkan bahawa jika $\frac{N_x - M_y}{M} = Q$,

dengan Q satu fungsi terhadap y sahaja, maka persamaan perbezaan

$$M + Ny' = 0$$

mempunyai satu faktor pengkamir berbentuk

$$\mu(y) = \exp \int Q(t) dt.$$

- (b) Selesaikan persamaan-persamaan berikut:

(i) $(x + e^y) \frac{dy}{dx} = -(x^2 + y)$

(ii) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1 + e^x}$

(iii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + by}{bx + cy}$, anggap $b^2 = ac$

- (c) Satu populasi ulat atas satu piring bercenderung untuk hidup dalam satu koloni membulat. Jika N adalah bilangan ulat dan r_1 kadar pertumbuhan, maka hukum pertumbuhan ialah $\frac{dN}{dt} = r_1 N$. Akan tetapi, ulat-ulat yang berada pada perimeter mati sebab kesejukan. Kadar kematian adalah berkadar dengan $N^{\frac{1}{2}}$. Biar pemalar kadaran sebagai r_2 . Dapatkan persamaan pembezaan yang dipenuhi oleh N . Tanpa menyelesaikan, lakarkan beberapa penyelesaian. Adakah titik seimbang wujud? Jika ya, adakah stabil?

3. Pertumbuhan satu spesies haiwan dalam satu persekitaran terhad boleh diwakili melalui persamaan beza berikut:

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = r_0 \left[1 - \frac{N(t)}{K} \right] N(t), \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

dengan $N(t)$ sebagai saiz populasi pada masa t , r_0 dan K pemalar-pemalar yang memparameterkan bagaimana populasi bertambah.

- (a) Dengan melakukan satu analisis kestabilan yang dilinearakan ke atas persamaan di atas, tunjukkan bahawa:
- (i) jika $0 < r_0 \Delta t < 1$, keseimbangan $N = K$ stabil tetapi tak berayun
 - (ii) jika $1 < r_0 \Delta t < 2$, keseimbangan stabil dan berayun
 - (iii) jika $r_0 \Delta t > 2$, keseimbangan tak stabil dan berayun
- (b) Bandingkan keputusan dari (a) dengan yang diperolehi dari persamaan pembezaan yang sepadan.

4. (a) (i) Jika $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ adalah masing-masing penyelesaian kepada

$$\begin{aligned} y'' + P(x)y' + Q(x)y &= R_1(x) \\ y'' + P(x)y' + Q(x)y &= R_2(x) \end{aligned}$$

Tunjukkan

$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ adalah penyelesaian kepada

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x)$$

- (ii) Dapatkan penyelesaian am $y'' + 2y = \cos 2x - x$
- (b) Dapatkan selang terbesar supaya masalah nilai awal

$$(x^2 - 2x)y'' + xy' - (x + 4)y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 2 \text{ pasti wujud.}$$

- (c) Tunjukkan $y_1(x) = \frac{1}{x}$; $y_2(x) = \frac{1}{x^3}$ membentuk set penyelesaian asas kepada

$$x^2 y'' + 5xy' + 3y = 0.$$

5. (a) (i) Tunjukkan jika a_{11} , a_{12} , a_{21} dan a_{22} adalah malar a_{12} , a_{21} bukan sifar keduanya dan jika $g_1(t)$ dan $g_2(t)$ adalah terbezakan, maka

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t)$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t)$$

dapat dibentuk ke satu persamaan peringkat kedua.

- (ii) Selesaikan sistem $x_1' = -3x_1 + 2x_2$

$$x_2' = 2x_1 - 3x_2$$

- (b) (i) Selesaikan $x'' + x = 5e^t \cos t$

- (ii) Cari penyelesaian dalam bentuk suatu siri

$$y'' - xy' = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

- (c) Cari penyelesaian am kepada

(i) $2y'' - 5y' - 3y = 0$

(ii) $y'' - 3y' - 4y = 2e^{2x}$

6. (a) Tunjukkan fungsi kompleks

$$e^{(1+2i)x}$$

adalah suatu penyelesaian kepada persamaan pembezaan $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Gunakan fakta ini untuk mendapatkan dua penyelesaian nyata yang tak bersandar secara linear.

- (b) Andaikan pada permulaannya dua tangki mengandungi 1000 litre cecair dengan bahan kimia sebanyak 20 kg. di tangki pertama dan 10 kg. di tangki kedua. Pada $t = 0$ air bersih disalurkan ke tangki pertama dengan kadar 20 litre/min. Selepas dikacau rata, kemudian disalurkan ke tangki kedua dengan kadar 20 litre/min., dan disalurkan keluar dengan kadar yang sama. Dapatkan satu rumus untuk mengetahui amaun kimia selepas suatu masa t . Dapatkan t supaya kepekatan cecair adalah sama untuk kedua-dua tangki.

- oooOOooo -