UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua, Sidang Akademik 1999/2000

Februari 2000

MAT 202 - Pengantar Analisis

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Jujukan $\{a_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$a_1 = \sqrt{7}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{7 + a_n}\,, \quad n \geq 1.$$

(i) Tunjukkan bahawa $a_n \leq 4\,, \quad \forall\, n \in I^+$.

(ii) Tunjukkan bahawa $a_{n+1} \geq a_n\,, \quad \forall\, n \in I^+$.

(iii) Adakah jujukan $\{a_n\}$ menumpu? Berikan alasan. Jika $\{a_n\}$ menumpu, cari hadnya.

(iv) Cari $\inf\{a_n\}$ dan $\sup\{a_n\}$.

(b) (i) A dan B adalah set. Jika $A \sim B$ dan B terbilangkan, buktikan bahawa A juga terbilangkan.

(ii) Fungsi $f : Q \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ditakrifkan sebagai

$$f((a,b)) = b, \quad a \in Q, \ b \in \mathbb{R}.$$

Jika $p,\ s \in \mathbb{R}$, cari imej songsang $f^{-1}(\{p,s\})$.
Adakah set $f^{-1}(\{p,s\})$ terbilangkan? Berikan alasan.

(100 markah)

2. (a) Tentukan sama ada set yang berikut adalah tertutup. Berikan alasan.

(i) $A = [-2, 0] \cup \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in I^+ \right\}$

(ii) $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \text{ atau } f(x) = 1 \right\}$ di mana fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah selanjar pada $\mathbb{R}$.

...2/-

(b) (i) Buktikan siri fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos n^2 x}{3^n}$ menumpu secara seragam pada $\mathbb{R}$.

(ii) Nilaikan $\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos n^2 x}{3^n} \, dx$.

(c) (i) Andaikan f fungsi dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ dan $a \in \mathbb{R}$. Nyatakan kriteria berjujukan yang setara dengan penyataan fungsi f selanjar pada a.

(ii) Fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ditakrifkan sebagai

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ x+1, & x \in \mathbb{R} - Q. \end{cases}$$

Andaikan $b \in Q$ dengan $b \neq 0$ dan jujukan $\{b_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$b_n = b + \frac{\sqrt{2}}{n}, \quad n \in I^+.$$

Cari $\operatorname{had}_{n \to \infty} g(b_n)$.

Apakah yang boleh dikatakan tentang keselanjaran fungsi g pada b? Berikan alasan.

(iii) Jika fungsi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selanjar pada $\mathbb{R}$, adakah jujukan imej $\left\{ h\left(\frac{n+1}{n}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ suatu jujukan Cauchy? Berikan alasan.

(100 markah)

3. (a) Fungsi diberikan sebagai

$$f(x) = \sin x \,, \; x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

dan $P_n = \left\{ 0, \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{2n}, \cdots, \frac{\pi(n-1)}{2n}, \frac{\pi}{2} \right\}$ merupakan petak pada $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ yang membahagikan selang $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kepada n subbahagian yang sama panjang.

(i) Cari $A(P_n; f) - B(P_n; f)$.

(ii) Dengan menggunakan kriteria Riemann, tunjukkan bahawa fungsi f terkamirkan pada $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

...3/-

(b) (i) Jika X, Y adalah subset dari $\mathbb{R}$ dan $X \subset Y$, buktikan bahawa $X^\circ \subset Y^\circ$.

(ii) Jika A, B dan C adalah subset dari $\mathbb{R}$, nyatakan hubungan di antara $(A \cup B \cup C)^\circ$ dengan $A^\circ \cup B^\circ \cup C^\circ$ dan buktikannya.

(c) Diberi $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$. Buktikan bahawa wujud jujukan $\{r_n\} \subset Q$ dengan

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n, b).$$

(*100 markah*)

4. (a) Diberi $\Im = \{A_x \mid x > 1\}$ di mana $A_x = \{t \in \mathbb{R} \mid x < t < x^3\}$, cari $\cup \Im$ dan $\cap \Im$.

(b) (i) Jika jujukan nombor nyata $\{x_n\}$ menumpu, buktikan bahawa jujukan $\{x_n\}$ adalah terbatas.

(ii) Adakah asas pernyataan dalam bahangian (i) benar?
Jika benar buktikannya dan jika tidak benar berikan satu contoh untuk menunjukkan ia tidak benar.

(c) Andaikan fungsi f terbezakan pada $[a, b]$ dan $f'(a) < w < f'(b)$. Fungsi F ditakrifkan pada $[a, b]$ dengan $F(x) = f(x) - wx$.

(i) Wujudkah minimum bagi fungsi F pada $[a, b]$? Berikan alasan.

(ii) Tunjukkan bahawa $F'(a) < 0$ dan $F'(b) > 0$.

(iii) Buktikan bahawa wujud $c \in (a, b)$ dengan $f'(c) = w$.

(*100 markah*)

-oooOooo-