UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1994/95

April 1995

MAT 202 - Pengantar Analisis

Masa : [3 jam]

Jawab kesemua EMPAT (4) soalan.

1. (a) Jika $\Im = \{A_k \mid k = 1,2,3,\ldots\}$ di mana $A_k = \left\{\frac{k}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\right\}$, cari $\cup \Im$ dan $\cap \Im$.

(15/100)

(b) (i) Buktikan bahawa siri fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ menumpu secara seragam pada $\mathbb{R}$ dan tunjukkan bahawa $\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}\, dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ialah suatu fungsi yang selanjar pada $\mathbb{R}$. Pertimbangkan siri $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ adalah menumpu, cari $f(0)$. Berikan alasan untuk jawapan anda.

(45/100)

(c) (i) Katakan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selanjar pada $\mathbb{R}$. Tunjukkan bahawa jika $a \in \mathbb{R}$ dan $f(a) > 0$, maka wujud suatu $\delta > 0$ supaya

$$f(x) > 0, \ \forall x \in J(a,\delta).$$

(ii) $g,\ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang selanjar pada $\mathbb{R}$ dan $g(x) < h(x), \forall x \in Q$. Tunjukkan bahawa $g(x) \leq h(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

(40/100)

...2/-

2. (a) (i) & merupakan suatu himpunan set yang bukan kosong. Hubungan ~ ditakrifkan atas & seperti yang berikut. Untuk $A, B \in$ &,

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{ wujud suatu fungsi } f : A \to B \text{ yang satu dengan satu dan keseluruh.}$$

Tunjukkan bahawa ~ adalah suatu hubungan kesetaraan.

(ii) Jika set D tak terhingga dan $D \sim F$, di mana set F adalah terbilangkan, buktikan D juga terbilangkan.

(iii) A dan B adalah set yang tak terhingga tetapi terbilangkan. Tunjukkan bahawa A x B juga terbilangkan.

(iv) S merupakan suatu himpunan semua selang yang tertutup dengan nombor nisbah sebagai titik hujung, iaitu

$$S = \{[a,b] \mid a,b \in Q\}$$

Adakah S terbilangkan atau tidak? Berikan alasan.

(70/100)

(b) Katakan $A \subseteq \mathbb{R}$.
Titik $x \in \mathbb{R}$ adalah suatu titik sempadan bagi A jika setiap jiranan$-\varepsilon$ bagi x mengandungi titik dari A dan titik dari A^P. Set semua titik sempadan bagi A ditandai sebagai ∂A. Buktikan bahawa

$$A \text{ terbuka} \Leftrightarrow \partial A \cap A \neq \phi.$$

(30/100)

3. (a) Diberi set $A = [4,\ 7) \cup \left\{(-1)^n (1 + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathrm{N}\right\}$.

(i) Cari $\inf A$ dan $\sup A$.

(ii) Cari semua titik had bagi A.

(iii) Cari semua titik pedalaman bagi A.

(iv) Adakah A tertutup? Berikan alasan.

(v) Adakah A padat? Berikan alasan.

(45/100)

... 3/-

(b) Diberikan fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan wujud α dengan $0 < \alpha < 1$ supaya

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha\, |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(i) Buktikan bahawa f selanjar secara seragam pada $\mathbb{R}$.

(ii) Jika $a_0 \in \mathbb{R}$ dengan jujukan $\{a_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Tunjukkan bahawa

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \alpha^n |a_1 - a_0|, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

dan $\{a_n\}$ adalah jujukan Cauchy.

Tambahan pula, jika $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, tunjukkan bahawa $f(a) = a$.

(iii) Tunjukkan bahawa jika $p \in \mathbb{R}$ mematuhi sifat $f(p) = p$, maka $p = a$.

(55/100)

4. Nyatakan sama ada setiap pernyataan berikut benar atau salah. Jika pernyataan itu benar, buktikannya dan jika ia salah, berikan satu contoh lawan untuk menunjukkan ia salah.

(a) Jika jujukan fungsi $\{f_n\}$ menumpu dan setiap f_n adalah selanjar pada A, maka $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ juga selanjar pada A.

(b) Jika jujukan nombor $\{x_n\}$ adalah menumpu, maka $\{x_n\}$ adalah jujukan Cauchy.

(c) Jika $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi yang selanjar pada A, maka f mempunyai maksimum dan minimum pada A.

(d) Jika $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ selanjar pada $\mathbb{R}$ dan setiap $G_n \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, adalah terbuka, maka $f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)$ juga terbuka.

(e) Jika $S \subseteq \mathbb{R}$, u adalah suatu batas atas bagi S dan u juga suatu titik had bagi S, maka $u = \sup S$.

(100/100)

- oooOOooo -