UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1998/99

April 1999

MAT 202/MAT 302 – Pengantar Analisis

Masa: [3 jam]

---

**ARAHAN KEPADA CALON:**

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam DUA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) (i) $A, B$ dan $C$ adalah set. Jika $A \sim B$ dan $B \sim C$, buktikan $A \sim C$.

   (ii) Jika $P \sim \mathbb{Z}$, adakah set $P$ terbilangkan? Berikan alasan.

   (b) Jika pernyataan berikut benar buktikannya, dan jika ia salah sangkalkannya dengan satu contoh lawan.

   "Jika jujukan $\{a_n\}$ mencapah, maka setiap subjujukannya juga mencapah".

   (c) Perhatikan bahawa bagi sebarang $S \subset \mathbb{R}$,

   $a \in \overline{S} \Leftrightarrow$ wujud jujukan $\{a_n\} \subset S$ yang menumpu ke $a$.

   Andaikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah selanjar pada $\mathbb{R}$ dan $A \subset \mathbb{R}$.

   Dengan menggunakan sifat di atas, buktikan $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

   *(100 markah)*

2. (a) $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ merupakan jujukan yang bersifat $x_1 < x_2$ dan

$$x_{n+1} - x_n \geq 2(x_n - x_{n-1}), \quad \forall \ n \geq 2.$$

   (i) Buktikan dengan aruhan matematik bahawa

$$x_{n+1} - x_n \geq 2^{n-1}(x_2 - x_1), \quad \forall \ n \geq 2.$$

   (ii) Adakah $\{x_n\}$ menokok? Berikan alasan.

   (iii) Adakah $\{x_n\}$ menumpu? Berikan alasan.

   (b) Katakan fungsi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selanjar pada $\mathbb{R}$ dan $a, b \in \mathbb{R}$.

   (i) Adakah set $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 1\}$ tertutup atau terbuka? Berikan alasan.

...2/-

(ii) Jika $f(a) > 0$, buktikan bahawa wujud $\delta > 0$ supaya

$$f(x) > 0\,, \quad \forall \;\; x \in J(a;\delta).$$

(iii) Jika $f(b) < g(b)$, tunjukkan bahawa wujud $\varepsilon > 0$ supaya

$$f(x) < g(x)\,, \quad \forall \;\; x \in J(b;\varepsilon).$$

(*100 markah*)

3. (a) Diberi set $S = (1,\ 24) \cup \{30\}$.

(i) Cari set pedalaman $S^\circ$.
(ii) Cari set titik had $S'$.
(iii) Adakah set $S$ terbuka? Berikan alasan.
(iv) Adakah $S$ terkait? Berikan alasan.

(b) Jujukan fungsi $\{f_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$f_n(x) = (\cos x)^n, \quad x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right].$$

(i) Cari $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(ii) Adakah $\{f_n\}$ menumpu secara seragam pada $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$? Berikan alasan.

(c) Andaikan $A \subset \mathbb{R}$ dan $b \in \mathbb{R}$. Jika $b \in A'$ dan $b$ suatu batas bawah bagi set $A$, buktikan bahawa $b = \inf A$.

(*100 markah*)

4. (a) Diberi $A_n = \left[-\dfrac{n^3}{1+n}, \dfrac{1}{1+n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Cari $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ dan $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

(b) Andaikan fungsi $f$ dan $g$ selanjar pada selang $[a, b]$ dan $\int_a^b f = \int_a^b g$. Buktikan bahawa wujud $c \in (a, b)$ supaya $f(c) = g(c)$.

(c) (i) Dengan menggunakan takrif keselanjaran secara seragam, buktikan bahawa fungsi $f(x) = x^2$ adalah selanjar secara seragam pada selang $(1,\ 10)$.

(ii) "Jika fungsi $g$ selanjar secara seragam pada $\mathbb{R}$, maka $g$ mempunyai maksimum pada $\mathbb{R}$."
Jika pernyataan ini benar buktikannya dan jika ia salah sangkalkannya dengan memberikan satu contoh lawan.

(*100 markah*)

- oooOooo -