

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua, Sidang Akademik 1999/2000

Februari 2000

MAT 122 – Persamaan Pembezaan 1

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi DUA PULUH DUA soalan di dalam TUJUH halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Kertas soalan ini mengandungi DUA bahagian.

BAHAGIAN I: 20 soalan objektif (50 markah). Sila jawab dalam borang OMR yang disediakan dengan pensil 2B sahaja. Jawab bahagian ini dahulu. Borang OMR serta kertas soalan Bahagian I akan dikutip 1 jam 30 minit selepas peperiksaan bermula.

BAHAGIAN II: 2 soalan deskriptif (50 markah).

Jawab **SEMUA** soalan dalam kedua-dua bahagian.

BAHAGIAN I: Jawab **SEMUA** 20 soalan. Setiap jawapan yang betul diberi 2½ markah [50/100].

1. Pilih pernyataan yang tidak benar bagi persamaan pembezaan berikut:

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^3 - kx \frac{dw}{dx} + w = 0, \quad k \text{ pemalar}$$

- (a) satu persamaan pembezaan biasa
- (b) w merupakan pembolehubah bersandar
- (c) x merupakan pembolehubah tak bersandar
- (d) satu persamaan pembezaan berdarjah 2
- (e) satu persamaan pembezaan berperingkat 2

2. Pilih persamaan pembezaan tak linear daripada yang berikut:

- (a) $L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = E \cos \omega t$, L, R, C, E, ω pemalar
- (b) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$
- (c) $\frac{d^3y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} + (\cos^2 x)y = x^3$

...2/-

(d) $(1 + t^2) \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + u = e^t$

(e) $\frac{d^3x}{dy^3} + x \frac{dx}{dy} - 4xy = 0$

3. Pertimbangkan persamaan pembezaan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = y^2 \tag{A}$$

Pilih pernyataan yang tidak benar bagi persamaan pembezaan (A).

(a) $f(x, y)$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ selanjar pada seluruh satah xy ✓

(b) melalui sebarang titik (x_0, y_0) , wujud satu dan hanya satu penyelesaian bagi persamaan pembezaan (A) ✓

(c) $y = \frac{1}{1-x}$ memenuhi persamaan pembezaan (A) bersama syarat $y(0) = 1$

(d) $y = \frac{1}{1-x}$ adalah suatu penyelesaian bagi persamaan pembezaan (A) bersama syarat $y(0) = 1$ pada selang $(-2, 2)$

(e) $y = \frac{1}{1-x}$ adalah suatu penyelesaian bagi persamaan pembezaan (A) bersama syarat $y(0) = 1$ pada selang $(-1, 1)$

4. Satu fungsi $N(x, y)$ supaya persamaan pembezaan

$$(x^{-2}y^{-2} + xy^{-3})dx + N(x, y)dy = 0$$

tepat ialah

(a) $-2x^{-2}y^{-3} - \frac{3}{2}xy^{-4} + k(y)$

(b) ✓ $2x^{-1}y^{-3} - \frac{3}{2}x^2y^{-4} + k(y)$

(c) $2x^{-1}y^{-3} - \frac{3}{2}x^2y^{-4} + c$

(d) $2x^{-1}y^{-3} - \frac{3}{2}xy^{-4} + k(y)$

(e) $-2x^{-2}y^{-3} - \frac{3}{2}x^2y^{-4} + k(y)$

5. Suatu faktor pengamir bagi persamaan pembezaan

$$xdx + ydy + 4y^3(x^2 + y^2)dy = 0 \tag{B}$$

ialah

(a) $\frac{1}{x^2 + y^2}$

(b) $\frac{1}{x}$

(c) $\frac{1}{y}$

(d) $\frac{1}{x + y}$

(e) $\frac{1}{y^3}$

...3/-

6. Penyelesaian am bagi persamaan pembezaan (B) ialah

- (a) $(x^2 + y^2)e^{4y^3} = c$ (b) $\ln(x^2 + y^2) + y^4 = \ln c$
 (c) $(x^2 + y^2)e^{2y^4} = c$ (d) $(x^2 + y^2)e^{y^4} = c$
 (e) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + y^3 = \ln c$

7. Diberikan persamaan pembezaan

$$(2x + y) \frac{dy}{dx} = x + 2y + 3, \quad (C)$$

Penggantian yang sesuai untuk menyelesaikan persamaan pembezaan (C) ialah

- (a) $X = x - 1, Y = y + 2$ (b) $X = x + 2, Y = y - 1$
 (c) $x = X - 1, y = Y + 2$ (d) $x = X - 2, y = Y + 1$
 (e) $X = x - 2, Y = y + 1$

8. Persamaan pembezaan (C) boleh ditukarkan kepada satu persamaan pembezaan homogen. Pilih persamaan pembezaan homogen tersebut daripada yang berikut:

- (a) $\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y}{2X + Y}$ (b) $\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y + 3}{2X + Y - 3}$ (c) $\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y + 6}{2X + Y}$
 (d) $\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y + 3}{2X + Y + 3}$ (e) $\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y - 3}{2X + Y + 3}$

9. Pilih pernyataan yang tidak benar bagi persamaan pembezaan berikut:

$$(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$$

- (a) satu persamaan pembezaan homogen berdarjah 2
 (b) $\frac{x^2}{x^2 + 3xy + y^2}$ homogen berdarjah sifar
 (c) $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$
 (d) $\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{x}{y}\right)$
 (e) Penggantian $y = vx$ akan menukarkan persamaan pembezaan di atas kepada persamaan pembolehubah terpisah $(1 + v^2) dx - xdv = 0$.

10. Persamaan Bernoulli $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$ boleh ditukarkan kepada bentuk persamaan pembezaan linear. Pilih persamaan pembezaan linear tersebut daripada yang berikut:
- (a) $\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = -x$ (b) $\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -1$ (c) $\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -x$
 (d) $\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = -x$ (e) $\frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = -x$
11. Persamaan cirian bagi persamaan $3y'' - y' - 2y = 0$ ialah
- (a) $3\lambda^2 - \lambda - 2$ (b) $3\lambda^2 - \lambda = 0$ (c) $3\lambda^2 - \lambda$
 (d) $3\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ (e) Tiada jawapan yang lebih sesuai.
12. Diberi $\lambda_1 = p + iq$ ialah satu punca cirian bagi suatu persamaan pembezaan linear homogen peringkat kedua dengan koefisien malar nyata dan λ_2 ialah punca cirian kedua. Dari rumus Euler ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$), $\frac{1}{2i}(e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}) =$
- (a) $e^{px} \sin qx$ (b) $e^{px} \cos qx$ (c) $e^{px}(\cos qx + \sin qx)$
 (d) $\cosh(\lambda_1 x)$ (e) $\sinh(\lambda_2 x)$
13. Persamaan pembezaan $gy'' + hy = 6 \sin 2x + 3x^2$ di mana g dan h adalah pemalar-pemalar, mempunyai penyelesaian pelengkap $y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Pilihan yang paling sesuai untuk penyelesaian khusus ialah $y_k =$
- (a) $A \sin 2x + B \cos 2x + Cx^2 + Dx + E$
 (b) $x(A \sin 2x + B \cos 2x) + Cx^2 + Dx + E$
 (c) $A \sin 2x + B \cos 2x + Cx^2$
 (d) $x(A \sin 2x + B \cos 2x) + Cx^2 + D$
 (e) $x^2(A \sin 2x + B \cos 2x) + Cx^2 + Dx + E$
14. Satu persamaan pembezaan tak homogen linear peringkat kedua mempunyai penyelesaian pelengkap $y_p = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$. Dengan kaedah ubahan parameter, dianggap penyelesaian khusus $y_k = u e^{3x} + v x e^{3x}$, dengan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$. Syarat yang boleh ditetapkan untuk mencari u dan v ialah
- (a) $u e^{3x} + v x e^{3x} = 0$ (b) $u' e^{3x} = 0$ (c) $v' x e^{3x} = 0$
 (d) $u' e^{3x} + v' x e^{3x} = 0$ (e) Tiada jawapan yang lebih sesuai.

ARAHAN: Jawab soalan-soalan (15), (16) dan (17) berpandukan maklumat berikut:

Diberi masalah nilai awal

$$y' = \frac{1}{2} - x + 2y \quad , \quad y(0) = 1 \quad (D)$$

15. Dengan menggunakan rumus Euler, pilih rumus untuk y_k daripada yang berikut:

(a) $y_k = (2h - 1)y_{k-1} + h(1 - x_{k-1})$ (b) $y_k = (1 - 2h)y_{k-1} + h\left(\frac{1}{2} - x_{k-1}\right)$

(c) $y_k = (1 + 2h)y_{k-1} + h\left(\frac{1}{2} - x_{k-1}\right)$ (d) $y_k = (1 + 2h)y_{k-1} + h(1 - x_{k-1})$

(e) $y_k = (1 + 2h)y_{k-1} + h\left(\frac{1}{2} - x_k\right)$

16. Pilih rumus untuk y_1 daripada yang berikut:

(a) $y_1 = (1 + 2h) - x_1$ (b) $y_1 = (1 + 2h) - x_1/2$ (c) $y_1 = (1 + 2h) + x_1$

(d) $y_1 = (1 + 2h) + h/2$ (e) $y_1 = (1 + 2h) + x_1/2$

17. Ralat rumus setempat e_{n+1} dalam sebutan x dan penyelesaian tepat ϕ jika kaedah Euler digunakan bagi masalah nilai awal (D) ialah

(a) $e_{n+1} = [-\bar{x}_n + \phi(\bar{x}_n)]h^2$, $x_n < \bar{x}_n < x_n + h$

(b) $e_{n+1} = [-2\bar{x}_n + 2\phi(\bar{x}_n)]h^2$, $x_n < \bar{x}_n < x_n + h$

(c) $e_{n+1} = [-\bar{x}_n + 2\phi(\bar{x}_n)]h^2$, $x_n < \bar{x}_n < x_n + h$

(d) $e_{n+1} = [\bar{x}_n + 2\phi(\bar{x}_n)]h^2$, $x_n < \bar{x}_n < x_n + h$

(e) $e_{n+1} = [\bar{x}_n + \phi(\bar{x}_n)]h^2$, $x_n < \bar{x}_n < x_n + h$

ARAHAN: Jawab soalan-soalan (18), (19), (20) berpandukan maklumat berikut:

Diberi x , y dan z adalah fungsi t dan

$$\frac{dx}{dt} = 3x + y - 2z \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -x + 2y + z \quad , \quad \frac{dz}{dt} = 4x + y - 3z .$$

Katakan $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dan A adalah suatu matriks 3×3 supaya $\underline{x}'(t) = A \underline{x}(t)$.

...6/-

18. Matriks A ialah

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} & \text{(b)} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} & \text{(c)} & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
 \text{(d)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{(e)} & \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} & &
 \end{array}$$

19. Nilai-nilai eigen bagi matriks A ialah

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} & 1, 1, 2 & \text{(b)} & 1, 1, -2 & \text{(c)} & 0, 1, 2 \\
 \text{(d)} & 1, -1, -2 & \text{(e)} & 1, -1, 2 & &
 \end{array}$$

20. Diberikan bahawa \underline{u} , \underline{v} dan \underline{w} adalah vektor-vektor eigen sepadan dengan nilai-nilai eigen bagi matriks A . Pilih penyelesaian am $\underline{x}(t)$ bagi sistem persamaan di atas daripada yang berikut (c_1, c_2 dan c_3 pemalar sebarang):

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & c_1 \underline{u} e^t + c_2 \underline{v} e^t + c_3 \underline{w} e^{2t} & \text{(b)} & c_1 \underline{u} e^t + c_2 \underline{v} e^{-t} + c_3 \underline{w} e^{2t} \\
 \text{(c)} & c_1 \underline{u} e^t + c_2 \underline{v} e^t + c_3 \underline{w} t e^{-2t} & \text{(d)} & c_1 \underline{u} e^t + c_2 \underline{v} e^{-t} + c_3 \underline{w} t e^{-2t} \\
 \text{(e)} & c_1 \underline{u} e^{-t} + c_2 \underline{v} e^t + c_3 \underline{w} e^{3t} & &
 \end{array}$$

BAHAGIAN II: Jawab kedua-dua soalan.

21. (a) (i) Tunjukkan bahawa parabola $y = x^2$ dan garis $y = 2x - 1$ kedua-duanya adalah penyelesaian bagi persamaan

$$y' = 2x - 2\sqrt{x^2 - y}$$

dengan $y(1) = 1$.

- (ii) Adakah hal ini bercanggah dengan Teorem kewujudan dan keunikan? Jelaskan jawapan anda.

- (b) Pertimbangkan persamaan pembezaan homogen

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 0$$

- (i) Tentusahkan bahawa $y = e^x$ adalah suatu penyelesaian bagi persamaan ini. Seterusnya, dapatkan penyelesaian tak bersandar kedua.

- (ii) Gunakan keputusan dalam (i) untuk mencari penyelesaian am bagi persamaan pembezaan tak homogen

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 1.$$

(25/100)

22. (a) Dengan gantian $x - 1 = v$, tunjukkan bahawa persamaan pembezaan

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (x - 1)^2 \frac{dy}{dx} - 4(x - 1)y = 0$$

boleh ditulis sebagai

$$\frac{d^2 y}{dv^2} + v^2 \frac{dy}{dv} - 4vy = 0.$$

Seterusnya, cari dua penyelesaian siri kuasa yang tak bersandar linear baginya sekitar titik biasa $x_0 = 1$. Tentukan jejari penumpuan bagi penyelesaian anda.

- (b) Persamaan gerakan bagi suatu jisim m yang dipaut pada suatu spring diberikan oleh

$$\frac{m}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F$$

di mana g ialah daya graviti ($= 9.8m / \text{saat}^2$), x ialah pertukaran dalam kedudukan jisim tersebut pada masa t , k ialah pemalar spring dan F ialah daya yang dikenakan pada jisim tersebut.

Soalan

Suatu jisim beratnya 19.6g dipaut pada satu spring di mana $k = 50g/m$ dan direhatkan. Dapatkan kedudukan jisim pada masa t jika suatu daya sama dengan $4 \sin 2t$ dikenakan padanya.

(25/100)