

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1998/99

April 1999

MAT 102 – Kalkulus Lanjutan

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Tentukan sama ada jujukan $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ berikut menumpu atau mencapah. Jika menumpu, cari hadnya.

(i) $a_n = \frac{8n - 400\sqrt{n}}{2n + 700\sqrt{n}}$

(ii) $a_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n$

(iii) $a_n = 1 + \cos n\pi$

- (b) Tentukan sama ada siri berikut menumpu atau mencapah

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n + 2}{\sqrt{n}(4n - 5)}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-0.3n}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{1.4.7 \dots (3n + 1)}$

(iv) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$

- (c) Pertimbangkan siri

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

- (i) Apakah jejari dan selang penumpuan bagi $J_0(x)$?
- (ii) Tunjukkan $y = J_0(x)$ ialah penyelesaian persamaan

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

...2/-

- (d) Diberi f suatu fungsi yang terbezakan. Tunjukkan bahawa

$$f(x) = f(a) + f'(a)x + f^{(2)}(a)\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f^{(3)}(t) dt$$

di sini a pemalar nyata.

(100 markah)

2. (a) Tentukan sama ada kamiran tak wajar berikut menumpu atau mencapah. Jika menumpu, cari nilainya.

(i) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

(ii) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

- (b) Diberi $du = 2x dy + (x^2 + y^2)dz$ dan $z = \ln(x^2 + y^2)$. Cari $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$ dan $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_z$.

- (c) Lakarkan rantau kamiran berikut:

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx.$$

Seterusnya, nilaikan kamiran ini dengan menukarkan tertib kamirannya.

- (d) Katakan $z = f(x, y)$ mempunyai terbitan separa peringkat 2 yang selanjar. Jika $x = e^r \cos \theta$ dan $y = e^r \sin \theta$, tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-2r} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right].$$

- (e) Dengan menggunakan gantian yang bersesuaian, tunjukkan bahawa

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{x-y}{x+y} \right)^4 dy dx = \frac{1}{10}.$$

(100 markah)

...3/-

3. (a) Dengan menggunakan kembangan siri bagi $\frac{1}{1+x}$, cari siri Maclaurin bagi

$$f(x) = \frac{5+7x}{(1-x)(1+3x)}.$$

- (b) Cari nilai yang paling besar dan yang paling kecil bagi fungsi $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2x + 3$ tertakluk kepada kekangan $x^2 + y^2 = 4$.

- (c) Adakah f selanjar pada $(0, 0)$?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (d) Katakan $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$ dan $x = h(y, z)$ ditakrifkan oleh persamaan

$$x^2y^2 + xz^3 - x^4 + zy^3 = 6.$$

- (i) Cari z_x , y_z dan x_y pada titik $(1, -1, 2)$.
 (ii) Tentusahkan bahawa

$$x_y y_z z_x = -1 \text{ pada titik itu.}$$

- (e) Dengan menggunakan kamiran ganda tiga, cari isipadu bungkah yang terkandung di antara permukaan $x^2 + 3y^2 = z$ dan $y^2 + z = 4$.

(100 markah)