UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester 2, Sidang Akademik 1999/2000

Februari 2000

MAA 111 – Aljabar Linear

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA PULUH ENAM soalan dalam DUA BAHAGIAN di dalam TUJUH halaman bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

BAHAGIAN A mengandungi TIGA PULUH LIMA soalan objektif. Jawab di dalam OMR. Pilih jawapan yang paling sesuai. Jawapan X bermaksud pilihan-pilihan lain tidak sesuai. Borang OMR akan dikutip 30 minit sebelum peperiksaan tamat.

BAHAGIAN B mengandungi SATU soalan. Jawab dalam kertas jawapan. JANGAN ikat kertas jawapan bersama dengan borang OMR.

BAHAGIAN A (70 markah)

1. Pilih sistem persamaan yang konsisten.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2 \\ x_2 - x_1 &= 2 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &= 3 \\ 9x_1 + 6x_2 &= 4 \end{aligned}$

2. Pilih sistem persamaan dengan set penyelesaian $\{x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3\}$.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 32 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 50 \end{aligned}$

...2/-

3. Suatu sistem persamaan linear mempunyai dua penyelesaian yang berlainan. Maka, perwakilan garis-garis tersebut dalam graf, akan menunjukkan

(a) tiga garis yang selari
(b) dua garis yang selari dan satu garis yang berserenjang dengan mereka
(c) tiga garis yang bertemu pada dua titik
(d) satu garis sahaja
(e) X

4. Pilih set penyelesaian sistem berikut:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 5 \\ 2x + 2y - 2z &= 10 \\ x + y + z &= 11 \end{aligned}$$

(a) $\{ x = y = z = 0 \}$ (b) $\{ x = 7,\ y = 1,\ z = 3 \}$
(c) $\{ x = \alpha,\ y = 8 - \alpha,\ z = 3,\quad \alpha \in \mathbb{R} \}$ (d) sistem tak konsisten (e) X

Jawab soalan-soalan 5 hingga 10 berpandukan sistem berikut:

$$\begin{aligned} kx - 9y &= a \\ 25x + ky &= 7 \end{aligned}$$

5. Cari nilai k supaya sistem mempunyai banyak penyelesaian.

(a) 3 (b) 5 (c) 15 (d) ± 15 (e) X

6. Cari nilai a supaya sistem mempunyai banyak penyelesaian diberi k dipilih nilai yang sesuai.

(a) 21/25 (b) 225/7 (c) 7 (d) sebarang nombor nyata (e) X

7. Cari nilai a yang memberi set penyelesaian $\{ x = 3,\ \ y = 4 \}$.

(a) 17 (b) -17 (c) -87 (d) 15 (e) X

8. Cari hubungan antara a dan y jika $x = -1$.

(a) $a = 9y$ (b) $a = -9y$ (c) $y(a + 9y) = -18$
(d) $y(a + 9y) = -32$ (e) X

9. Diberi $a = -7$, cari nilai k yang akan memberi penyelesaian $x = y$

(a) 9 (b) 16 (c) 17 (d) -25 (e) -8

10. Matriks imbuhan bagi sistem ini ialah

(a) $\left[\begin{array}{cc|c} k & -9 & a \\ 25 & k & 7 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{cc|c} kx & -9y & a \\ 25x & ky & 7 \end{array}\right]$

(c) $\begin{bmatrix} k & -9 \\ 25 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -9 \\ 25 & k \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a \\ 7 \end{bmatrix}$ (e) X

...3/-

11. Operasi baris permulaan boleh digunakan untuk

(a) menyelesaikan sistem persamaa linear.
(b) mencari penentu matriks $n \times n$.
(c) menjelmakan sistem persamaan linear kepada suatu sistem yang setara dengannya.
(d) memperoleh songsangan matriks tak singular.
(e) semua jawapan di atas.

12. Jika $A \xrightarrow{R_2^1} I_n$, maka

(a) $A = I_n$ (b) $A = A^{-1}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) A ialah matriks *BEBT* (e) A ialah matriks tak singular

13. Jika $A \xrightarrow{R_3^1(2)} B$, maka

(a) $|A| = |B|$ (b) $A = B^{-1}$ (c) $A,\ B \in M_{3\times3}$

(d) $A,\ B \in M_{3\times n}$ (e) X

14. Pilih pernyataan yang salah

(a) Sebarang matriks *BEB* boleh diturunkan sehingga *BEBT*.
(b) Sebarang matriks boleh diturunkan sehingga *BEB*.
(c) Sebarang matriks boleh diturunkan sehingga *BEBT*.
(d) Sebarang matriks boleh diturunkan sehingga I_n.
(e) X

15. Diberi $AB = I_n$. Maka

(a) $|A| = |B|$ (b) $|A| = |B|^{-1}$ (c) $A = B^{-1}$

(d) $|AB| = |BA|$ (e) X

16. Diberi $I_3 \xrightarrow{R_2^1} \xrightarrow{R_3^2(1/2)} A$. Maka $A^{-1} =$

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (e) X

17. Diberi $A^{-1} = B$. Maka

(a) $A^{-1}B^{-1} = A$ (b) $A^{-1}B^{-1} = B$ (c) $A^{-1}B^{-1} = (AB)^{-1}$

(d) $A^{-1}B = I_n$ (e) $A^{-1}B = B^{-1}A$

..4/-

18. Diberi $A, B, C \in M_{2\times 2}$. Pilih pernyataan yang benar.

(a) $(CA)B = B(AC)$ (b) $C(A^2 - B^2) = C(A+B)(A-B)$
(c) $(A+B)^2 C = (A^2 + B^2)C + 2ABC$
(d) $(A+B)(B+C) = B^2 + AB + AC + BC$ (e) X

19. *BEBT* bagi $\begin{bmatrix} -11 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ialah

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. Pilih pernyataan yang benar.

(a) Semua matriks *BEB* adalah matriks *BEBT*.
(b) Wujud matriks *BEBT* yang bukan matriks *BEB*.
(c) Semua matriks *BEB* mempunyai pemasukan sifar.
(d) Semua matriks *BEBT* mempunyai pemasukan sifar.
(e) X.

21. Pilih pernyataan yang benar mengenai sistem persamaan linear.

(a) Semua sistem homogen mempunyai penyelesaian tak remeh.
(b) Semua sistem homogen tidak mempunyai penyelesaian remeh.
(c) Semua sistem tak homogen tidak mempunyai penyelesaian remeh.
(d) Wujud sistem homogen tanpa penyelesaian remeh.
(e) Wujud sistem tak homogen dengan penyelesaian remeh.

22. Pilih pernyataan yang tidak benar mengenai sistem persamaan linear.

(a) Semua sistem homogen adalah konsisten.
(b) Semua sistem tak homogen adalah konsisten.
(c) Wujud sistem homogen yang konsisten.
(d) Wujud sistem tak homogen yang konsisten.
(e) Sistem tak homogen yang tidak mempunyai penyelesaian adalah tak konsisten.

23. Diberi $A \in M_{m\times n}$ dan $B \in M_{n\times m}$ dengan $AB = BA$. Maka

(a) A atau B adalah matriks identiti (b) A atau B ialah matriks sifar
(c) $A = B$ (d) $A^{-1} = B$ (e) X

...5/-

24. Diberi $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Maka $AB =$

(a) $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (e) X

25. Diberi $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ dengan $a_{ij} = i + j$. Maka $|A| =$

(a) -12 (b) -2 (c) -1 (d) 0 (e) X

26. Diberi $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & e \\ -c & f \end{bmatrix} = I_2$. Maka $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$

(a) $ad + bc$ (b) $df - be$ (c) 0 (d) 1 (e) X

27. Diberi $A \xrightarrow{R_1} \xrightarrow{R_2} \cdots \xrightarrow{R_k} I_n$. Jika E_i merupakan matriks baris permulaan yang setara dengan R_i, maka $A^{-1} =$

(a) $\prod_{i=1}^{k} E_i$ (b) $\prod_{i=0}^{k-1} E_{k-i}$ (c) $\prod_{i=1}^{k} (E_i)^{-1}$

(d) $\prod_{i=0}^{k-1} (E_{k-i})^{-1}$ (e) X

28. Diberi $A \in M_{m\times n}$, persamaan homogen $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ mempunyai penyelesaian tak remeh jika

(a) $m < n$ atau A singular (b) $m = n$ atau A tak singular

(c) $m > n$ atau A tak singular (d) $m > n$ dan A singular (e) X

29. Diberi $A \in M_{3\times 3}$ dengan $|A| = 3$. Jika $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ -13 & -1 & -9 \\ 6 & -4 & -7 \end{bmatrix}$, $|\text{Adj } A| =$

(a) 0 (b) 3 (c) 9 (d) 27 (e) X

30. Jika A ialah matriks singular $|\text{Adj } A| =$

(a) 0 (b) 3 (c) 9 (d) 27 (e) X

...6/-

31. Diberi $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ dan $N(A)$ ialah ruang nol bagi A. Jika $\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in N(A)$ dengan $\underset{\sim}{x} \neq \underset{\sim}{y}$, maka

(a) $A\underset{\sim}{x} = A\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $A\underset{\sim}{x} \neq A\underset{\sim}{y} \neq \underset{\sim}{0}$ (c) $I_2\underset{\sim}{x} = I_2\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\underset{\sim}{y}$

32. Diberi $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Yang manakah di antara berikut bukan merupakan syarat supaya V adalah suatu ruang vektor nyata?

(a) $\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v} \in V$ (b) $\underset{\sim}{u}\,\underset{\sim}{v} \in V$ (c) $\alpha\underset{\sim}{u} \in V$

(d) $\alpha(\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v}) = \alpha\underset{\sim}{u} + \alpha\underset{\sim}{v}$ (e) X

33. Diberi V dan W adalah ruang vektor dengan $V \subset W$. Pilih pernyataan yang salah.

(a) W adalah subruang dari V (b) $\underset{\sim}{0} \in V \Rightarrow \underset{\sim}{0} \in W$

(c) $\underset{\sim}{0} \in W$ dan $\underset{\sim}{0} \in V$ (d) $\underset{\sim}{u} \in V \Rightarrow -\underset{\sim}{u} \in W$ (e) X

34. Pilih set yang bersandar linear dari yang berikut jika diberikan $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ (b) $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$ (c) $\left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

(d) $\left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } c \neq 0,\ a \neq b\right\}$ (e) X

35. Pilih pernyataan yang salah.

(a) Semua ruang nol merupakan ruang vektor.
(b) Semua ruang lajur merupakan ruang vektor.
(c) Semua ruang baris merupakan ruang vektor.
(d) Julat matriks-matriks yang jenisnya sama merupakan ruang vektor.
(e) X

...7/-

BAHAGIAN B (30 markah)

36. (a) Katakan $A \in M_{n \times n}$

(i) Nyatakan takrif nilai eigen A serta takrif vektor eigen yang sepadan.

(ii) Katakan $\underset{\sim}{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underset{\sim}{v} \neq 0$ dan $\lambda \in \mathbb{R}$ supaya $A\underset{\sim}{v} = \lambda \underset{\sim}{v}$. Gunakan takrif di bahagian (i) untuk menunjukkan bahawa $\underset{\sim}{v}$ ialah suatu vektor eigen yang sepadan dengan nilai eigan λ.

(iii) Tunjukkan bahawa A adalah matriks singular jika dan hanya jika $\lambda = 0$ ialah suatu nilai eigen.

(15 markah)

(b) Diberi $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(i) Cari $p(\lambda)$ iaitu polinomial cirian bagi A.

(ii) Nilaikan $p(0)$. Apakah signifikasi nilai ini? Nyatakan sama ada A matriks singular atau tak singular.

(iii) Cari A^{-1} jika ianya wujud.

(iv) Cari nilai-nilai eigen bagi A dan vektor-vektor eigen yang sepadan.

(v) Tahkikkan bahawa set vektor-vektor eigen di bahagian (iv) adalah tak bersandar linear.

(vi) Tuliskan A dalam bentuk terpepenjurukan jika mungkin.

(15 markah)

-oooOooo-