
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Akhir
Sidang Akademik 2007/2008

April 2008

JIM 317 – Persamaan Pembezaan II

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Terangkan maksud titik biasa, titik singular dan titik singular sekata bagi persamaan pembezaan

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = 0$$

di mana $p(x)$, $q(x)$ dan $r(x)$ adalah polinomial.

(20 markah)

- (b) Cari titik-titik singular bagi persamaan pembezaan

$$x^2(x-4)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - (x-4)y = 0$$

dan bagi setiap titik singular tersebut tentukan sama ada ia sekata atau tidak.

(35 markah)

- (c) Nyatakan sama ada penyelesaian siri kuasa di sekitar $x = 2$ dalam bentuk

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$$

wujud bagi persamaan dalam (b). Jika wujud, tentukan selang dan jejari penumpuannya.

[Penyelesaian siri kuasa yang lengkap tidak diperlukan].

(45 markah)

2. Diberi persamaan pembezaan

$$y'' + 3xy' + 3y = 0.$$

- (a) Andaikan bentuk penyelesaian siri kuasa di sekitar $x = 0$ adalah

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dapatkan hubungan jadi-semula yang membabitkan koefisien a_n .

(30 markah)

- (b) Tunjukkan satu penyelesaian siri ialah

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{2n}}{2^n n!}$$

dan cari penyelesaian siri kedua $y_2(x)$ yang tak bersandar linear.

(45 markah)

- (c) Jika $y(0) = 2$ dan $y'(0) = 3$, dapatkan penyelesaian bagi masalah nilai awal tersebut.

(25 markah)

3. (a) (i) Apakah persamaan pembezaan autonomus?
(ii) Apakah titik genting bagi persamaan pembezaan autonomus peringkat pertama?
(iii) Terangkan penyelesaian keseimbangan persamaan autonomus.
(iv) Huraikan pengertian titik penarik dan penolak.
(v) Takrifkan titik genting yang stabil secara asimptotik.

(50 markah)

- (b) Ketumpatan populasi $P(t)$ suatu spesies ikan menepati persamaan pembezaan autonomus

$$\frac{dP}{dt} = 27P - 12P^2 + P^3.$$

Cari ketumpatan keseimbangan dan tentukan kestabilannya.

(50 markah)

4. Pertimbangkan masalah nilai sempadan

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$$
$$y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

- (a) Tunjukkan masalah nilai sempadan tersebut tidak mempunyai fungsi eigen untuk $\lambda < 4$, tetapi untuk $\lambda > 4$ yang sesuai, fungsi eigen ialah

$$\phi_n(x) = e^{-2x} \sin(w_n x), \quad n \geq 1$$

di mana w_n menepati persamaan

$$w_n = 2 \tan w_n.$$

(60 markah)

- (b) Tuliskan persamaan pembezaan yang diberi dalam bentuk persamaan Sturm-Liouville dan dengan itu, atau cara lain, tunjukkan bahawa

$$\int_0^1 e^{4x} \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

(40 markah)

5. Diberi masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$y(1) = 0.5$$

- (a) Gunakan rumus Euler

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

dengan $h = 0.1$ untuk mendapat nilai hampiran $y(1.2)$ sehingga empat titik perpuluhan.

(50 markah)