

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1993/94

Oktober/November 1993

MST561 - Pentaabiran Statistik

[Masa: 3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Katakan X_1, X_2, X_3, X_4 adalah pembolehubah-pembolehubah rawak tak bersandar dengan masing-masing X_i mempunyai f.k.k.

$$f_{x_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} x^{\alpha_i-1} e^{-x}, & 0 < x < \infty, \alpha_i > 0, \\ 0 & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Katakan $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}$

$$Y_2 = \frac{X_2}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}$$

$$Y_3 = \frac{X_3}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}$$

dan $Y_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$

Cari f.k.k. tercantum bagi Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 .

(50/100)

- (b) Katakan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel rawak daripada taburan eksponen dengan parameter $\lambda > 0$, iaitu, f.k.k. bagi setiap X_i ialah

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 0 < x < \infty \\ 0 & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

.../2

Biarkan $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(i) Dapatkan f.k.k. bagi Y_n .

(ii) Cari taburan penghad pembolehubah rawak $Z_n = \frac{Y_n}{n}$.

(50/100)

2. (a) Takrifkan sebutan-sebutan berikut:

(i) statistik cukup

(ii) kelengkapan bagi suatu famili taburan.

(20/100)

(b) Nyatakan Kriteria Pemfaktoran Neyman-Fisher.

(10/100)

(c) Dalam setiap kes berikut di mana taburan bagi X bergantung pada suatu parameter θ yang tidak diketahui, tentukan adakah $|X|$ cukup bagi θ secara teliti dengan menunjukkan bagaimanakah anda mendapati kesimpulan-kesimpulan anda:

(i) $X \sim N(0, \theta^2)$,

(ii) $X \sim N(\theta, 1)$,

(iii) f.k.k. $f_\theta(x)$ bagi X ialah

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{3\theta}{2} & \text{jika } 0 < x < \frac{1}{2\theta}, \\ \frac{\theta}{2} & \text{jika } -\frac{1}{2\theta} < x < 0, \\ 0 & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

(45/100)

- (d) Katakan $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geq 2$) suatu sampel rawak daripada taburan Bernoulli dengan parameter p , $0 < p < 1$. Cari suatu penganggar saksama bagi $d(p) = p^2$.

(25/100)

3. (a) Nyatakan

- (i) Teorem Rao-Blackwell.
- (ii) Teorem Lehmann-Scheffe.

Apakah peranan teorem-teorem di atas di dalam teori penganggaran?

(30/100)

- (b) Katakan $X_1, X_2, \dots, X_n$ suatu sampel rawak daripada $N(\theta, \theta^2)$.

- (i) Tunjukkan $T = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2 \right)$ ialah suatu statistik cukup tercantum bagi θ .

- (ii) Adakah T lengkap?

Petunjuk: Pertimbangkan fungsi

$$g(x_1, \dots, x_n) = 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

(30/100)

- (c) Katakan X , Y dan Z pembolehubah rawak tak bersandar yang mempunyai taburan Poisson dengan min $E(X) = \lambda$, $E(Y) = 2\lambda$ dan $E(Z) = 3\lambda$ masing-masing.

- (i) Tunjukkan bahawa $X + Y + Z$ ialah suatu statistik cukup dan lengkap bagi λ .
- (ii) Dapatkan taburan bersyarat bagi Y diberikan $X + Y + Z$.

.../4

$$(iii) \text{ Katakan } W = \begin{cases} 0 & \text{jika } Y \neq 0 \\ 1 & \text{jika } Y = 0 \end{cases}$$

Tunjukkan bahawa W ialah saksama bagi $d(\lambda) = e^{-2\lambda}$. Demikian, dapatkan penganggar saksama dengan varians minimum secara seragam bagi $d(\lambda) = e^{-2\lambda}$.

4. (a) Nyatakan Ketaksamaan Cramer-Rao.

(15/100)

- (b) Terangkan sebutan-sebutan berikut:

- (i) Ralat jenis I,
- (ii) Ralat jenis II,
- (iii) Kuasa bagi suatu ujian,
- (iv) Ujian Paling Berkuasa Secara Seragam.

(20/100)

- (c) Nyatakan Lema Asasi Neyman-Pearson.

(15/100)

- (d) Katakan $X_1, X_2, \dots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan Poisson:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad \theta > 0$$

- (i) Cari ujian paling berkuasa secara seragam dengan saiz α bagi menguji $H_0: \theta = \theta_0$ lawan $H_1: \theta > \theta_0$.
- (ii) Jika $n = 25$ dan $\theta_0 = 1$, tentukan rantau genting sepadan pada suatu ujian saiz $\alpha = .05$. Anda boleh mengguna Teorem Had Memusat.

(50/100)

.../5

5. (a) Terangkan sebutan-sebutan berikut:

- (i) penganggar tak varian,
- (ii) ujian saksama,
- (iii) ujian tak varian,
- (iv) ujian nisbah kebolehjadian.

(20/100)

(b) Katakan $X_1, X_2, \dots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x; \theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} \exp(-e^{-(x-\theta)}), & x \geq \theta, \quad -\infty < \theta < \infty, \\ 0, & x < \theta. \end{cases}$$

- (i) Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ .
- (ii) Apakah penganggar kebolehjadian maksimum bagi $P_\theta(X_1 - \theta \geq 1)$?

(40/100)

(c) Katakan $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i}$ adalah sampel rawak saiz n_i daripada taburan $N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Andaikan μ_i , $i = 1, 2, \dots, k$ dan σ^2 anu. Anggapkan juga k sampel rawak di atas tak bersandar.

Tunjukkan bahawa ujian nisbah kebolehjadian bagi menguji $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ lawan H_1 : bukan semua μ_i adalah sama, boleh diasaskan pada pembolehubah rawak

$$F = \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 / (k - 1)}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 / (n - k)},$$

di mana $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, $\bar{X} = \sum_i \sum_j X_{ij} / n$ dan

$$\bar{X}_i = \sum_j X_{ij} / n_i.$$

(40/100)

Taburan	Fungsi Ketumpatan f	Min $\mu = E[X]$	Varsians $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$	Fungsi penjana Momen
Seragam Diskrit	$f(x) = \frac{1}{N} I_{\{1, 2, \dots, N\}}(x)$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} e^{jt}$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0, 1\}}(x)$	p	pq	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0, 1, \dots, n\}}(x)$	np	npq	$(q + pe^t)^n$
Geometri	$f(x) = p q^x I_{\{0, 1, \dots\}}(x)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1 - qe^t}$
Poisson	$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} I_{\{0, 1, \dots\}}(x)$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
Seragam	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a, b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} I_{(-\infty, \infty)}(x)$	μ	σ^2	$\exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$
Eksponen	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0, \infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$
Gamma	$f(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1} I_{(0, \infty)}(x)$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n, \quad t < \lambda$
Khi kuasa dua	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r/2} \frac{1}{\Gamma(r/2)} e^{-x/2} x^{(r/2)-1} I_{(0, \infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}, \quad t < \frac{1}{2}$
Beta	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0, 1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	—