UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2000/2001

April/Mei 2001

MSS 211 – Aljabar Moden

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA EMPAT** soalan.

APRIL /MEI 2001

1. (a) Katakan hubungan W ditakrifkan ke atas set $A = R - \{0\}$ dengan

$$W = \{(x, y) \mid xy > 0\}.$$

Tentukan sama ada W

(i) refleksif

(ii) simetri

(iii) transitif

(30/100)

(b) Katakan $H = \{(x, y) \in R \times R \mid x \neq 0\}$ dan operasi $*$ ditakrifkan ke atas H dengan

$$(a,b) * (c,d) = (ac,\ bc + d).$$

Tunjukkan bahawa

(i) $*$ adalah suatu operasi dedua atas H.

(ii) $*$ adalah kalis sekutuan.

Cari unsur identiti bagi $*$ dan songsangan bagi $(a,b) \in H$.
Cari (x, y) yang memenuhi $(1, 2) * (x, y) = (3, 4)$.

(40/100)

(c) Bagi setiap kongruen yang berikut, tentukan yang mana mempunyai penyelesaian integer. Cari semua penyelesaian integer yang wujud itu

(i) $4x \equiv 7 \pmod 6$

(ii) $4x \equiv 20 \pmod 6$

(30/100)

2. (a) Katakan $\langle G, * \rangle$ ialah suatu kumpulan dan $a, b \in G$. Jika $a * b = b * a$, buktikan bahawa

$$a * b^n = b^n * a \quad \text{bagi semua integer } n.$$

(20/100)

...3/-

(b) Katakan A_4 = kumpulan selangseli darjah 4 dan

$$H = \{e, (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1), (1\ 2\ 4), (4\ 2\ 1)\}$$

Tentukan sama ada H suatu subkumpulan bagi A_4.

Jika $K = \{e, (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1)\}$, cari semua koset kanan bagi K dalam A_4. Tentukan sama ada K suatu subkumpulan normal bagi A_4.

(50/100)

(c) Katakan α ialah suatu pilihatur yang bukan identiti e. Jika wujud integer positif n supaya $\alpha^{2n+1} = e$, buktikan α adalah suatu pilihatur genap.

(30/100)

3. (a) Katakan dua fungsi f dan g ditakrifkan ke atas S_4 seperti berikut:

$(\alpha)f = (1\ 2)\alpha$

$(\alpha)g = (1\ 2)\alpha(1\ 2)$.

Tentukan sama ada f atau g merupakan homomorfisma.

(30/100)

(b) Katakan $G = \langle a \rangle$ ialah suatu kumpulan kitaran yang tak terhingga. Cari satu isomofisma dari $\langle G, * \rangle$ ke $\langle Z, + \rangle$.

(30/100)

(c) Katakan G_1 dan G_2 dua kumpulan dan e_2 ialah identiti bagi G_2. Katakan $f : G_1 \to G_2$ ialah suatu homomorfisma dan

$$H = \{x \in G_1 \mid (x)f = e_2\}$$

Buktikan bahawa H adalah subkumpulan normal bagi G_1.

(40/100)

4. (a) Takrifkan sebutan-sebutan berikut:

   (i) gelanggang

   (ii) medan

   (iii) domain integer

   (15/100)

   (b) Katakan

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in R \right\}$$

   dan $+$, x ialah penambahan dan pendaraban matriks.

   Tunjukkan $\langle M, +, x \rangle$ adalah suatu gelanggang tetapi bukan domain integer.

   (35/100)

   (c) Katakan $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z\}$. Buktikan bahawa H adalah suatu subgelanggang bagi $\langle R, +, x \rangle$.

   (20/100)

   (d) Buktikan bahawa persilangan dua subgelanggang B_1, B_2 bagi suatu gelanggang A adalah suatu subgelanggang bagi A.

   (30/100)

- ooo O ooo -