UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1997/98

Februari 1998

MSS 211/MSS 311 - Aljabar Moden

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (i) Cari integer positif terkecil yang memuaskan persamaan kongruen berikut:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 5 \\ x &\equiv 5 \pmod 9 \\ x &\equiv 2 \pmod{11} \\ x &\equiv 9 \pmod{13} \end{aligned}$$

(25/100)

(ii) Cari semuanombor perdana p sedemikian hingga $7p+4$ ialah kuasa dua sempurna.

(25/100)

(iii) Cari $(123456, 654321)$ dan tulis jawapan ini dalam bentuk $\alpha(123456)+\beta(654321)$, $\alpha, \beta \in Z$.

(25/100)

(iv) Selesaikan $123456x \equiv 2 \pmod{654321}$.

(25/100)

2. (i) Katakan $f: Z \to N$ ditakrifkan dengan $f(x) = x^2 - 1$. Adakah f suatu fungsi? Jelaskan jawapan anda.

(40/100)

(ii) Katakan $f: R \to R$ ditakrifkan dengan

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \le 3 \\ x^2+1 & x > 3 \end{cases}.$$

Buktikan f tersongsangkan dan cari songsangnya.

(60/100)

...2/-

3. Katakan $(G,*)$ ialah suatu kumpulan terhingga. Takrifkan $\forall a, b \in G$, aHb jika dan hanya jika $O(a) = O(b)$.

   (i) Buktikan H ialah hubungan kesetaraan.

   (40/100)

   (ii) Jika $G = S_3$, cari semua kelas kesetaraan.

   (30/100)

   (iii) Jika $G = Z_p$, p ialah nombor perdana, cari semua kelas kesetaraan.

   (30/100)

4. (i) Daripada 100 orang pelajar, didapati bahawa 26 orang mengambil matematik, 48 orang mengambil Fizik, 8 orang mengambil Fizik dan Kimia, 23 orang mengambil Matematik tetapi tidak mengambil Kimia, 16 orang mengambil Matematik sahaja, 8 orang mengambil Matematik dan Fizik dan 24 orang tidak mengambil Matematik, Fizik atau Kimia. Berapakah bilangan pelajar yang mengambil Kimia?

   (50/100)

   (ii) Daripada 100 orang pelajar, didapati bahawa tiap-tiap seorang mempunyai 50 orang kawan (tak kira sendiri). Buktikan dapat dipilih 4 orang A, B, C, D, sedemikian hingga B ialah kawan D, C, C ialah kawan A, B, D ialah kawan A, B, dan A ialah kawan D, C.

   (50/100)

5. Katakan $(G,*)$ ialah suatu kumpulan dan $x, y \in G$.

   (i) Buktikan $\forall\, k \in Z$, $(x^{-1}yx)^k = x^{-1}y^k x$.

   (30/100)

   (ii) Jika $O(x) = 5$ dan $x^{-1}yx = y^2$, cari $O(y)$.

   (40/100)

   (iii) Cari semua kelas konjugat bagi S_4.

   (30/100)

6. Katakan $(G,*)$ ialah suatu kumpulan.

(i) Jika $A \Delta G, B \Delta G$ dan $A \cap B = \{e\}$. Buktikan $\forall x \in A,\ y \in B,\ x * y = y * x$.

(40/100)

(ii) Jika $A \Delta G, B \leq G$, buktikan $AB = \{a*b \mid a \in A,\ b \in B\}$ ialah subkumpulan bagi G.

(30/100)

(iii) Jika $\forall\ a \in G\ ,\ a^2 = e$. Buktikan $(G,*)$ ialah kumpulan abelan.

(30/100)

7. (i) Kalau $G_1 = \{A = (1,1)\ ,\ B = (-1,-1)\ ,\ C = (-1,1)\ ,\ D = (1,-1)\}$ dan $(i,j) * (\ell,m) = (i\ell, jm)$.

Cari sifir Cayley bagi $(G,*)$.

(30/100)

(ii) Kalau $G_2 = \left\{ a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ dan $\forall\ x, y \in G,\ x \circ y$ ialah pendarapan matrik x dan y. Cari sifir Cayley bagi $(G_2, 0)$.

(30/100)

(iii) Adakah $(G_1,*)$ berisomorfisma dengan $(G_2,0)$? Jelaskan jawapan anda.

(40/100)

- ooo0ooo -