

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1997/98

April 1998

MSG 363 - Reka Bentuk dan Analisis Ujikaji

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA soalan di dalam ENAM halaman dan EMPAT BELAS halaman lampiran yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Apakah prinsip-prinsip asas dalam reka bentuk ujikaji?
Terangkan dengan jelas.
Berikan contoh-contoh yang sesuai.

(30/100)

- (b) Huraikan perbezaan di antara ujikaji faktorial dan ujikaji "one at a time".
Berikan contoh-contoh untuk mengilustrasi.

(30/100)

- (c) Sukatan-sukatan sifat daripada dua belas sampel bahan asphalt telah diperolehi.
Pembolehubah-pembolehubah yang berkaitan adalah:

Y	:	<i>penetration</i> pada suhu 115 darjah Fahrenheit
X1	:	<i>softening point</i> (darjah Fahrenheit)
X2	:	<i>penetration</i> pada suhu 32 darjah Fahrenheit
X3	:	<i>penetration</i> pada suhu 77 darjah Fahrenheit
X4	:	peratusan <i>insoluble n-pentane</i>
X5	:	<i>flash point</i> (darjah Fahrenheit)

Data yang dikuitp telah diproses dengan menggunakan prosedur REGRESSION daripada SPSS dengan kaedah BACKWARD.

Output diperolehi adalah seperti ditunjukkan di bawah:

...2/-

- 2 -

**** MULTIPLE REGRESSION ****

Beginning Block Number 1

Method: Enter

Equation Number 1

Dependent Variable..

Y

penetration at 115
degrees Fahr

Variable(s) Entered on Step Number

1..	X5	flash point (degrees Fahrenheit)
2..	X2	penetration at 32 degrees Fahrenheit
3..	X4	percentage of insoluble n-pentane
4..	X3	penetration at 77 degrees Fahrenheit
5..	X1	softening point (degrees Fahrenheit)

Multiple R	.95797
R Square	.91771
Adjusted R Square	.84913
Standard Error	12.54555

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	5	10531.32217	2106.26443
Residual	6	944.34450	157.39075

F=13.38239

Signif F= .0033

----- Variables in the Equation -----

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X5	-.44811	.15762	-.46904	-2.843	.0295
X2	-3.20115	2.06897	-.34028	-1.547	.1728
X4	-3.69954	2.09781	-.31773	-1.764	.1283
X3	4.14139	1.51372	.67847	2.736	.0339
X1	-.27839	.53361	-.13349	-.522	.6206
(Constant)	432.86902	107.09932		4.042	.0068

End Block Number 1 All requested variables entered.

Beginning Block Number 2. Method: Backward

Variables(s) Removed on Step Number

6..	X1	softening point (degrees Fahrenheit)
-----	----	--------------------------------------

Multiple R	.95602
R Square	.91398
Adjusted R Square	.86482
Standard Error	11.87544

...3/-

Analysis of Variance

	DF	Sum of Squares	Mean Square
Regression	4	10488.48429	2622.12107
Residual	7	987.18238	141.02605

F = 18.59317

Signif F = .0008

----- Variables in the Equation -----

Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X5	-.50048	.11504	-.52386	-4.351	.0034
X2	-3.90057	1.49169	-.41462	-2.615	.0347
X4	-4.43831	1.46507	-.38117	-3.029	.0191
X3	4.69403	1.02355	.76901	4.586	.0025
(Constant)	435.61276	101.25642		4.302	.0036

----- Variables not in the Equation -----

Variable	Beta In	Partial	Min Toler	T	Sig T
X1	-.13349	-.20831	.20948	-.522	.6206

End Block Number 2. POUT = .100 Limits reached.

Huraikan kesimpulan-kesimpulan yang anda boleh perolehi daripada *output* itu. Gunakan $\alpha = .05$ jika diperlukan.

Nyatakan anggapan yang diperlukan bagi penggunaan kaedah regresi ini.

(40/100)

2. (a) Terangkan sebutan-sebutan berikut:

- (i) Saling tindak
 - (ii) Pembauran
- Gunakan contoh-contoh untuk mengilustrasi.

(30/100)

(b) Seorang jurutera sedang mengkaji kesan kelajuan memotong terhadap kadar penanggalan logam dalam suatu operasi memesis. Walau bagaimanapun, kadar penanggalan logam ini juga terkandung dengan kekerasan spesimen ujian tersebut. Lima cerapan telah diambil pada setiap kelajuan memotong. Amaun logam yang ditanggalkan (y) dan kekerasan spesimen (x) dipamerkan dalam jadual berikut:

...4/-

Kelajuan Memotong (rpm)

	1000		1200		1400	
	y	x	y	x	y	x
	68	120	112	165	118	175
	90	140	94	140	82	132
	98	150	65	120	73	124
	77	125	74	125	92	141
	88	136	85	133	80	130
Jumlah	421	671	430	683	445	702

$$\sum_i \sum_j y_{ij}^2 = 115, 148$$

$$\sum_i \sum_j x_{ij}^2 = 285, 366$$

$$\sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} = 180, 946$$

- (i) Dirikan jadual analisis kovarians bagi data di atas.
- (ii) Dapatkan kesimpulan yang sesuai. Gunakan $\alpha = .05$.
- (iii) Hitungkan min rawatan terlaras dan ralat piawainya bagi data di atas.

(40/100)

- (c) Huraikan prosedur yang digunakan untuk memperoleh jangkaan min kuasa dua bagi berbagai kesan daripada suatu reka bentuk faktorial umum. Ilustrasikan dengan contoh-contoh.

(30/100)

3. (a) Huraikan reka bentuk-reka bentuk berikut:

- (i) Reka bentuk faktorial
- (ii) Reka bentuk tersarang
- (iii) Reka bentuk belahan plot

Berikan contoh-contoh untuk mengilustrasi.

Apakah perbezaan di antara reka bentuk-reka bentuk di atas?

(30/100)

- (b) Di bawah ialah hasil daripada suatu kajian yang menggunakan reka bentuk plot belahan. Tiga jenis baja B_1, B_2 dan B_3 , dan dua persediaan tanah T_1 dan T_2 telah dijalankan bagi setiap plot tanah. Ujikaji telah dijalankan dalam dua blok dan data diperoleh ditunjuk di bawah:

...5/-

Blok	Blok (B) (Plot Utama)	Persediaan Tanah (T) (sub-plot)	
		T_1	T_2
1	B_1	6	3
	B_2	8	5
	B_3	4	7
2	B_1	2	6
	B_2	5	5
	B_3	1	3

$$\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 = 299$$

Huraikan kesimpulan-kesimpulan yang anda boleh memperoleh daripada analisis data ini. Gunakan $\alpha = .05$.

(40/100)

- (c) Seorang jurutera perusahaan sedang mengkaji perubahan dimensi komponen tertentu yang dikeluarkan oleh tiga mesin. Setiap mesin mempunyai dua spindel, dan empat komponen dipilih secara rawak daripada setiap spindel. Data dikutip ditunjuk di bawah:

Mesin	1		2		3	
	1	2	1	2	1	2
Spindel	12	7	14	12	13	16
	9	9	15	10	10	15
	11	10	13	11	12	15
	12	8	14	13	11	14
Jumlah spindel, y_{ij}	44	34	56	46	46	60
Jumlah mesin, y_i	78		102		106	

$$\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 = 3,540$$

Analisis data ini, dengan mengandaikan bahawa mesin dan spindel merupakan faktor tetap. Gunakan $\alpha = .05$.

(30/100)

...6/-

4. (a) Dalam suatu ujikaji mengenai hasil kimia, empat faktor telah dikaji dan setiap faktor mempunyai dua paras. Satu pereplikaan tunggal bagi reka bentuk 2^4 telah dijalankan, dengan faktor suhu (A), tekanan (B), masa (C) dan kepekatan (D), dan data diperolehi ditunjuk di bawah:

(1) = 16	d = 17
a = 17	ad = 19
b = 45	bd = 38
ab = 63	abd = 69
c = 14	cd = 16
ac = 18	acd = 19
bc = 40	bcd = 42
abc = 58	abcd = 68

Analisis data ini dengan menggunakan kaedah Yates dengan menganggap bahawa saling tindak tiga faktor dan lebih boleh diabaikan.

- (b) Andaikan hanya pecahan satu per dua reka bentuk 2^4 dalam (a) dijalankan. Bina reka bentuk ini dan tuliskan struktur alias yang lengkap.

Berikan juga jadual analisis varians bagi kes ini.

(100 markah)

5. Tuliskan nota-nota pendek mengenai topik-topik yang berikut:

- (i) Kontras-kontras
- (ii) Ujian-ujian perbandingan berganda
- (iii) Analisis Residual
- (iv) Prinsip kuasa dua terkecil

(100 markah)

BERBAGAI RUMUS (Tatataanda seperti di dalam nota kuliah)

- 1.
- Dua sampel tak bersandar
- (
- $n_1 < 25$
- atau
- $n_2 < 25$
-)

$$s_p^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 + \sum_j (y_j - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- 2.
- Sampel berpasangan

$$s_d^2 = \frac{\sum_i (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}$$

$$= \frac{\sum_i d_i^2 - \frac{(\sum d_i)^2}{n}}{n - 1}$$

- 3.
- Analisis varian satu hala

$$SST = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SSA = \sum_i \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SSE = SST - SSA$$

Bagi sebarang kontras $L = \sum_i c_i y_{i.}$

$$SSL = \frac{(\sum_i c_i y_{i.})^2}{(n \sum_i c_i^2)}$$

4. Rekabentuk blok rawakan

$$SST = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SSA = \sum_i \frac{y_{i.}^2}{b} - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SSB = \sum_j \frac{y_{.j}^2}{a} - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SSE = SST - SSA - SSB$$

5. Rekabentuk segiempat sama Latin

$$SST = \sum_i \sum_j y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SSR = \sum_i \frac{y_{i..}^2}{p} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SSC = \sum_k \frac{y_{..k}^2}{p} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SSA = \sum_j \frac{y_{.j.}^2}{p} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SSE = SST - SSR - SSC - SSA$$

6. Rekabentuk faktorial (dua faktor)

$$SST = \sum_i \sum_j y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SSA = \sum_i \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

- 3 -

$$SSB = \sum_j \frac{y_{.j}^2}{n_j} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SS_{\text{sub-jumlah}} = \sum_i \sum_j \frac{y_{ij}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{N}$$

$$SSAB = SS_{\text{sub-jumlah}} - SSA - SSB$$

$$SSE = SST - SS_{\text{sub-jumlah}}$$

7. Korelasi dan regresi linear mudah

$$r^2 = \frac{\left(\sum_i x_i y_i - \frac{(\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n} \right)^2}{\left[\sum_i x_i^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{n} \right] \left[\sum_i y_i^2 - \frac{(\sum_i y_i)^2}{n} \right]}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{(\sum_i x_i)(\sum_i y_i)}{n}}{\sum_i x_i^2 - \frac{(\sum_i x_i)^2}{n}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\begin{aligned} SSE &= S_{yy} - \hat{\beta}_1^2 S_{xx} \\ &= S_{yy} - \hat{\beta}_1 S_{xy} \end{aligned}$$

$$S_{Y \cdot X}^2 = \frac{SSE}{n-2}$$

Anggaran ralat piawai bagi $\hat{\beta}_0$ ialah

$$\sqrt{\text{MSE} \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right)}$$

Anggaran ralat piawai bagi $\hat{\beta}_1$ ialah

$$\sqrt{\text{MSE}/S_{xx}}$$

Selang peramalan $100(1 - \alpha)\%$ pada $x = x_0$:

$$\hat{y} \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\text{MSE} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}$$

Selang keyakinan $100(1 - \alpha)\%$ pada $x = x_0$ bagi $\mu_{Y \cdot X_0}$ ialah

$$\hat{y} \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\text{MSE} \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right)}$$

8. Regresi linear berganda

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \quad \underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{\underline{\beta}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1} \underline{X}'\underline{y}$$

$$\text{SSE} = \underline{y}'\underline{y} - \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{y}$$

$$\text{SSR} = \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{y} - (\sum y_i)^2/n$$

$$r_{12.3}^2 = \frac{(r_{12} - r_{13} r_{23})^2}{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}$$

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-p}, \quad p = k+1$$

9. Polinomial ortogon

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = \lambda_1 \left[\frac{x-\bar{x}}{d} \right]$$

$$P_2(x) = \lambda_2 \left[\left(\frac{x-\bar{x}}{d} \right)^2 - \left(\frac{n^2-1}{12} \right) \right]$$

$$P_3(x) = \lambda_3 \left[\left(\frac{x-\bar{x}}{d} \right)^3 - \left(\frac{x-\bar{x}}{d} \right) \left(\frac{3n^2-7}{20} \right) \right]$$

$$P_4(x) = \lambda_4 \left[\left(\frac{x-\bar{x}}{d} \right)^4 - \left(\frac{x-\bar{x}}{d} \right)^2 \left(\frac{3n^2-13}{14} \right) + \frac{3(n^2-1)(n^2-9)}{560} \right]$$

$$\hat{\theta}_j = \frac{\sum_{i=1}^n P_j(x_i) y_i}{\sum_{i=1}^n P_j^2(x_i)}, \quad j = 0, 1, \dots, k$$

$$SSR(\alpha_j) = \hat{\theta}_j \sum_{i=1}^n P_j(x_i) y_i$$

$$SSE(k) = S_{yy} - \sum_{j=1}^k \hat{\theta}_j \left[\sum_{i=1}^n P_j(x_i) y_i \right]$$

10. Pemilihan pembolehubah dan pembangunan model dalam regresi

$$R_p^2 = \frac{SSR(p)}{S_{yy}} = 1 - \frac{SSE(p)}{S_{yy}}$$

$$\overline{R}_p^2 = 1 - \left(\frac{n-1}{n-p} \right) (1 - R_p^2)$$

$$MSE(p) = \frac{SSE(p)}{n-p}$$

$$C_p = \frac{SSE(p)}{\hat{\theta}^2} - (n-2p), \quad \text{di mana } \hat{\theta}^2 \text{ adalah suatu anggaran } \sigma^2.$$

Rekabentuk Blok Tak Lengkap

$$N = ar = bk$$

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{a-1}$$

$$SST = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_{\text{Blok}} = \sum_j \frac{y_{.j}^2}{k} - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$Q_i = y_{i.} - \frac{1}{k} \sum_j n_{ij} y_{.j}, \quad i = 1, 2, \dots, a$$

$$SS_{\text{Rawatan (terlaras)}} = \frac{k \sum_i Q_i^2}{\lambda a}$$

$$SSE = SST - SS_{\text{Rawatan (terlaras)}} - SS_{\text{Blok}}$$

$$\text{Bagi Kontras } L = \sum_i c_i Q_i,$$

$$SSL = k \frac{\left(\sum_i c_i Q_i \right)^2}{\lambda a \sum_i c_i^2}$$

$$\text{Ralat piawai bagi suatu rawatan terlaras} = \sqrt{\frac{k \text{ MSE}}{\lambda a}}$$

$$Q_j = y_{.j} - \frac{1}{r} \sum_i n_{ij} y_{i.}, \quad j = 1, 2, \dots, b$$

$$SS_{\text{Blok (terlaras)}} = r \frac{\sum_j (Q_j)^2}{\lambda b}$$

Rekabentuk Faktorial (Tiga faktor)

$$SST = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l y_{ijkl}^2 - \frac{y^2}{abcn}$$

$$SSA = \sum_i \frac{y_{i...}^2}{bcn} - \frac{y^2}{abcn}$$

$$SSB = \sum_j \frac{y_{.j.}^2}{acn} - \frac{y^2}{abcn}$$

$$SSC = \sum_k \frac{y_{...k}^2}{abn} - \frac{y^2}{abcn}$$

$$SS_{\text{subjumlah (AB)}} = \sum_i \sum_j \frac{y_{ij.}^2}{cn} - \frac{y^2}{abcn}$$

$$SS_{\text{subjumlah (AC)}} = \sum_i \sum_k \frac{y_{ik.}^2}{bn} - \frac{y^2}{abcn}$$

$$SS_{\text{subjumlah (BC)}} = \sum_j \sum_k \frac{y_{.jk}^2}{an} - \frac{y^2}{abcn}$$

$$SS_{\text{subjumlah (ABC)}} = \sum_i \sum_j \sum_k \frac{y_{ijk}^2}{n} - \frac{y^2}{abcn}$$

$$SS_{A \times B} = SS_{\text{subjumlah (AB)}} - SS_A - SS_B$$

$$SS_{A \times C} = SS_{\text{subjumlah (AC)}} - SS_A - SS_C$$

$$SS_{B \times C} = SS_{\text{subjumlah (BC)}} - SS_B - SS_C$$

$$SS_{A \times B \times C} = SS_{\text{subjumlah (ABC)}} - SS_A - SS_B - SS_C \\ - SS_{A \times B} - SS_{A \times C} - SS_{B \times C}$$

$$SS_E = SS_T - SS_{\text{subjumlah (ABC)}}$$

Rekabentuk 2^k

$$\text{Kontras}_{AB \dots K} = (a \pm 1) (b \pm 1) \dots (k \pm 1)$$

$$AB \dots K = \frac{2}{n 2^k} (\text{Kontras}_{AB \dots K})$$

$$SS_{AB \dots K} = \frac{1}{n 2^k} (\text{Kontras}_{AB \dots K})^2$$

$$SS_{\text{curvature}} = \frac{n_F n_C (\bar{y}_F - \bar{y}_C)^2}{n_F + n_C}$$

$$L = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_K x_K$$

Bekabentuk Tersarang

1. Dua Tahap

$$SST = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - \frac{y^2}{abn}$$

$$SS_A = \sum_i \frac{y_i^2}{bn} - \frac{y^2}{abn}$$

$$SS_{B(A)} = \sum_i \sum_j \frac{y_{ij}^2}{n} - \sum_i \frac{y_i^2}{bn}$$

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_{B(A)}$$

2. Tiga Tahap

$$SS_T = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l y_{ijkl}^2 - \frac{y^2}{abcn}$$

$$SS_A = \sum_i \frac{y_i^2}{bcn} - \frac{y^2}{abcn}$$

$$SS_{B(A)} = \sum_i \sum_j \frac{y_{ij}^2}{cn} - \sum_i \frac{y_i^2}{bcn}$$

$$SS_{C(B)} = \sum_i \sum_j \sum_k \frac{y_{ijk}^2}{n} - \sum_i \sum_j \frac{y_{ij}^2}{cn}$$

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_{B(A)} - SS_{C(B)}$$

Analisis Kovarians

$$S_{yy} = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{an}$$

$$S_{xx} = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{an}$$

$$S_{xy} = \sum_i \sum_j x_{ij} y_{ij} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an}$$

$$T_{yy} = \sum_i \frac{y_i^2}{n} - \frac{y^2}{an}$$

$$T_{xx} = \sum_i \frac{x_i^2}{n} - \frac{x^2}{an}$$

$$T_{xy} = \sum_i \frac{(x_i)(y_i)}{n} - \frac{(x)(y)}{an}$$

$$E_{yy} = S_{yy} - T_{yy}$$

$$E_{xx} = S_{xx} - T_{xx}$$

$$E_{xy} = S_{xy} - T_{xy}$$

$$\hat{\beta} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}}$$

$$SS_E = E_{yy} - (E_{xy})^2 / E_{xx}$$

$$SS_E = S_{yy} - (S_{xy})^2 / S_{xx}$$

$$MSE = \frac{SSE}{a(n - 1) - 1}$$

$$\bar{y}_{i.(varias)} = \bar{y}_i - \hat{\beta} (\bar{x}_i - \bar{x}), i = 1, 2, \dots, a$$

$$S_{\bar{y}_{i.(varias)}} = \left[MSE \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_i - \bar{x})^2}{E_{xx}} \right) \right]^{1/2}$$

X. Coefficients of Orthogonal Polynomials^a

x_j	$n=3$		$n=4$			$n=5$				$n=6$					$n=7$					
	P_1	P_2	P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3	P_4	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	-1	1	-3	1	-1	-2	2	-1	1	-5	5	-5	1	-1	-3	5	-1	3	-1	1
2	0	-2	-1	-1	3	-1	-1	2	-4	-3	-1	7	-3	5	-2	0	1	-7	4	-6
3	1	1	1	-1	-3	0	-2	0	6	-1	-4	4	2	-10	-1	-3	1	1	-5	15
4			3	1	1	1	-1	-2	-4	1	-4	-4	2	10	0	-4	0	6	0	-20
5						2	2	1	1	3	-1	-7	-3	-5	1	-3	-1	1	5	15
6										5	5	5	1	1	2	0	-1	-7	-4	-6
7															3	5	1	3	1	1
$\sum_{j=1}^n (P_j(x_j))^2$	2	6	20	4	20	10	14	10	70	70	84	180	28	252	28	84	6	154	84	924
λ	1	3	8	1	$\frac{10}{3}$	1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{12}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{11}{10}$	1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{11}{30}$

x_j	$n=8$						$n=9$						$n=10$					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	-7	7	-7	7	-7	1	-4	28	-14	14	-4	4	-9	6	-42	18	-6	3
2	-5	1	5	-13	23	-5	-3	7	7	-21	11	-17	-7	2	14	-22	14	-11
3	-3	-3	7	-3	-17	9	-2	-8	13	-11	-4	22	-5	-1	35	-17	-1	10
4	-1	-5	3	9	-15	-5	-1	-17	9	9	-9	1	-3	-3	31	3	-11	6
5	1	-5	-3	9	15	-5	0	-20	0	18	0	-20	-1	-4	12	18	-6	-8
6	3	-3	-7	-3	17	9	1	-17	-9	9	9	1	1	-4	-12	18	6	-8
7	5	1	-5	-13	-23	-5	2	-8	-13	-11	4	22	3	-3	-31	3	11	6
8	7	7	7	7	7	1	3	7	-7	-21	-11	-17	5	-1	-35	-17	1	10
9							4	28	14	14	4	4	7	2	-14	-22	-14	-11
10													9	6	42	18	6	3
$\sum_{j=1}^n (P_j(x_j))^2$	168	168	264	616	2184	264	60	2772	990	2002	468	1980	330	132	8580	2860	780	660
λ	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{11}{60}$	1	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{11}{60}$	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{120}$

^a Adapted with permission from *Biometrika Tables For Statisticians*, Vol. 1, 3rd edition by E. S. Pearson and H. O. Hartley, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

VII. Significant Ranges for Duncan's Multiple Range Test*

f	$r_{01}(p, f)$											
	p											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	100
1	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0	90.0
2	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0	14.0
3	8.26	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	8.9	9.0	9.0	9.3	9.3	9.3
4	6.51	6.8	6.9	7.0	7.1	7.1	7.2	7.2	7.3	7.5	7.5	7.5
5	5.70	5.96	6.11	6.18	6.26	6.33	6.40	6.44	6.5	6.8	6.8	6.8
6	5.24	5.51	5.65	5.73	5.81	5.88	5.95	6.00	6.0	6.3	6.3	6.3
7	4.95	5.22	5.37	5.45	5.53	5.61	5.69	5.73	5.8	6.0	6.0	6.0
8	4.74	5.00	5.14	5.23	5.32	5.40	5.47	5.51	5.5	5.8	5.8	5.8
9	4.60	4.86	4.99	5.08	5.17	5.25	5.32	5.36	5.4	5.7	5.7	5.7
10	4.48	4.73	4.88	4.96	5.06	5.13	5.20	5.24	5.28	5.55	5.55	5.55
11	4.39	4.63	4.77	4.86	4.94	5.01	5.06	5.12	5.15	5.39	5.39	5.39
12	4.32	4.55	4.68	4.76	4.84	4.92	4.96	5.02	5.07	5.26	5.26	5.26
13	4.26	4.48	4.62	4.69	4.74	4.84	4.88	4.94	4.98	5.15	5.15	5.15
14	4.21	4.42	4.55	4.63	4.70	4.78	4.83	4.87	4.91	5.07	5.07	5.07
15	4.17	4.37	4.50	4.58	4.64	4.72	4.77	4.81	4.84	5.00	5.00	5.00
16	4.13	4.34	4.45	4.54	4.60	4.67	4.72	4.76	4.79	4.94	4.94	4.94
17	4.10	4.30	4.41	4.50	4.56	4.63	4.68	4.73	4.75	4.89	4.89	4.89
18	4.07	4.27	4.38	4.46	4.53	4.59	4.64	4.68	4.71	4.85	4.85	4.85
19	4.05	4.24	4.35	4.43	4.50	4.56	4.61	4.64	4.67	4.82	4.82	4.82
20	4.02	4.22	4.33	4.40	4.47	4.53	4.58	4.61	4.65	4.79	4.79	4.79
30	3.89	4.06	4.16	4.22	4.32	4.36	4.41	4.45	4.48	4.65	4.71	4.71
40	3.82	3.99	4.10	4.17	4.24	4.30	4.34	4.37	4.41	4.59	4.69	4.69
60	3.76	3.92	4.03	4.12	4.17	4.23	4.27	4.31	4.34	4.53	4.66	4.66
100	3.71	3.86	3.98	4.06	4.11	4.17	4.21	4.25	4.29	4.48	4.64	4.65
∞	3.64	3.80	3.90	3.98	4.04	4.09	4.14	4.17	4.20	4.41	4.60	4.68

f = degrees of freedom

*Reproduced with permission from "Multiple Range and Multiple *t* Tests," by D. B. Duncan, *Biometrics*, Vol 1, No. 1, pp 1-42, 1955

.../7