UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1988/89

ZSC 310/3 - Kaedah Matematik III

Tarikh: 2 November 1988 Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengah hari
(3 jam)

Jawab KESEMUA EMPAT soalan.
Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Tunjukkan bagaimana persamaan Bessel

$$x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2)y = 0 \qquad n \geq 0$$

didapati daripada persamaan Laplace $\nabla^2 u = 0$ yang diungkapkan di dalam koordinat silinderan (ρ,ϕ,z). Persamaan Laplace di dalam koordinat silinderan ialah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(40/100)

(b) Jika $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p J_n(\lambda_p x)$, $0 < x < 1$, di sini λ_p, $p = 1,2,3,\ldots$ ialah punca positif untuk $J_n(x) = 0$, tunjukkan bahawa

$$A_p = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_p)} \int_0^1 x\, J_n(\lambda_p x) f(x)\, dx$$

Perhatikan bahawa

$$\int_0^1 x\, J_n^2(\lambda x)\, dx = \tfrac{1}{2}[J_n'^2(\lambda) + (1 - \frac{n^2}{\lambda^2}) J_n^2(\lambda)]$$

...2/-

dan

$$\int_0^1 x\, J_n(\lambda x) J_n(\mu x)\, dx = 0$$

di sini λ dan μ ialah pemalar berlainan dan
$x\, J_n'(x) = n\, J_n(x) - x\, J_{n+1}(x)$.

(30/100)

(c) Sekarang kembangkan $f(x) = 1$ di dalam suatu siri berbentuk

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_p\, J_o(\lambda_p\, x)$$

untuk $0 < x < 1$, jika λ_p; $p = 1,2,3,\ldots$ ialah punca positif untuk $J_o(x) = 0$.

Perhatikan bahawa

$$\int x^n\, J_{n-1}(x)\, dx = x^n\, J_n(x) + c$$

di sini c ialah suatu pemalar.

(30/100)

2. Sekeping plat bersegiempat sama mempunyai sisi yang panjangnya ialah 1 unit. Muka plat tersebut ditebat dan tepinya dikekalkan pada suhu sifar 0^oC. Jika suhu awal plat ialah $f(x,y)$ tentukan suhu pada masa t pada sebarang titik plat ini.
Perhatikan persamaan pengkonduksi haba ialah

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\, \nabla^2 u$$

di sini u ialah suhu pada masa t dan titik x.

(100/100)

3. (a) Cari siri Fourier untuk suatu fungsi berkala $f(x)$ yang ditakrifkan oleh

$$f(x) = -\pi \quad \text{jika} \quad -\pi < x < 0$$

$$f(x) = x \quad \text{jika} \quad 0 < x < \pi$$

(60/100)

(b) Dengan demikian buktikan bahawa

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

Plotkan suatu graf untuk siri ini.

(20/100)

(c) Tunjukkan bahawa fungsi $\delta(x) = \underset{\varepsilon\to\infty}{\text{had}} \dfrac{\sin(2\pi\varepsilon x)}{\pi x}$ adalah suatu fungsi delta (Dirac).

Di beri $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

(20/100)

4. (a) Cari transformasi Laplace songsang

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}\right\}$$

Anda boleh menggunakan hubungan-hubungan berikut:-

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + b^2}\right\} = \frac{\sin bt}{b}$$

$$L^{-1}\{f(s - a)\} = e^{at}\, F(t) \quad \text{jika} \quad L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$$

(30/100)

(b) Selesaikan $y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin t$,

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

di sini $y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$.

Gunakan $L\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0)$

$- s^{n-2}F'(0) \; \ldots \; sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$

dan $L\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$

$L\{\sin bt\} = \dfrac{b}{s^2+b^2} \qquad s > 0.$

(45/100)

(c) Buktikan bahawa $L\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$ di sini $s > 0$.

(25/100)

- ooo0ooo -