

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang Akademik 1993/94

Jun 1994

ZSC 310/3 - Kaedah Matematik III

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini. Jawab KESEMUA EMPAT soalan. Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Fungsi penjanaan bagi polinomial Tschebyscheff, $U_n(x)$ ialah

$$\phi(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n$$

Tunjukkan bahawa

$$U_n(x) = \sum_{\alpha=0}^n P_{\alpha}(x)P_{n-\alpha}(x)$$

di mana $P_{\alpha}(x)$ ialah polinomial Legendre. Tunjukkan pula

$$\int_{-1}^1 U_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}$$

(30/100)

- (b) Setelah sesuatu sfera (jejari r_0) diletakkan di dalam medan elektrik seragam E_0 , keupayaan elektrostatik berubah menjadi V yang mematuhi persamaan Laplace

- (i) Terangkan sebabnya penyelesaian berbentuk

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta)$$

- (ii) Kalau syarat sempadan yang relevan ialah

$$V(r \rightarrow \infty) = -E_0 r P_1(\cos\theta)$$

$$V(r = r_0) = 0$$

...2/-

dapatkan kemampuan V di seluruh kawasan di luar sfera.

(70/100)

2. Persamaan Schrödinger bagi proton di dalam nukleus boleh dituliskan sebagai

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E + V(\underline{r}) \right] \psi(\underline{r}) = 0$$

di mana simbol-simbol mempunyai maksud biasanya. Kalau $V(\underline{r}) = V(r)$ dan $\psi(\underline{r}) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$

- (a) Terangkan bagaimana komponen jejarian persamaan Schrödinger dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} R_{n\ell}(r) \right] + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R_{n\ell}(r) = 0$$

- (b) Kalau $V(r)$ berbentuk

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r \leq r_0, V_0 = \text{pemalar} \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

- (i) Dapatkan penyelesaian bagi $R_{n\ell}(r)$.
- (ii) Dengan syarat keselantaran fungsi gelombang di $r = r_0$, dapatkan tenaga proton di dalam nukleus (di dalam sebutan \hbar , m dan V_0).

(100/100)

3. (a) Terangkan bezanya di antara pengembangan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

sebagai (i) suatu siri Fourier sinus dan (ii) suatu siri Fourier kosinus. Dapatkan salah satu pengembangan (i) atau (ii).

...3/-

Dalam cara apa lagi fungsi yang tersebut di atas dapat dikembangkan sebagai suatu siri Fourier. Sebutkan perbedaannya dengan (i) dan (ii) di atas.

(50/100)

- (b) Pengaliran haba di dalam sesuatu rod yang berpanjang l mematuhi masalah nilai sempadan

$$a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} U(x,t); \quad u < x < l, t > 0$$

$$U(0,t) = U(l,t) = 0; \quad t \geq 0$$

$$U(x,0) = 10$$

di mana a ialah pemalar keresapan termal.

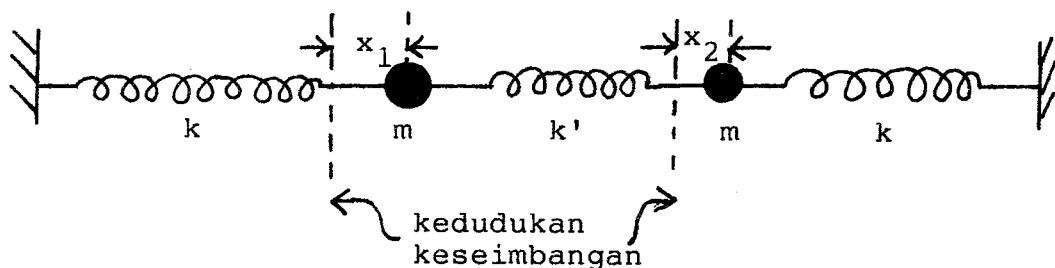
Tunjukkan penyelesaian am yang terhingga berbentuk

$$U(x,t) = e^{-a^2 \lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)$$

dan tetapkan nilai-nilai pemalar λ , A dan B yang mematuhi syarat sempadan yang tersebut ($-\lambda^2$ ialah pemalar pemisahan).

(50/100)

4. (a) Timbangkan sistem osilator tergantung seperti berikut yang tertarik ke sebelah kanan



...4/-

(i) Tunjukkan persamaan gerakan sistem ialah

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1)$$

(10/100)

(ii) Selesaikan persamaan gerakan melalui kaedah transform Laplace dengan memilih syarat-syarat awal yang sewajar.

(40/100)

(b) Arus yang mengalir di dalam suatu litar RLC mematuhi persamaan

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

Dapatkan penyelesaian I secara transform Laplace bagi kesemua kes yang mungkin, tertakluk kepada syarat $I(0) = I_0$ dan $I'(0) = 0$.

(50/100)