UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1986/87

ZMC 211/3 - Kaedah Matematik II

Tarikh: 15 April 1987

Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari
(3 jam)

Jawab EMPAT soalan sahaja.
Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Buktikan bahawa, dalam ruang vektor berdimensi tiga, tiga vektor $\vec{A}$, $\vec{B}$ dan $\vec{C}$ adalah bersandar linear jika dan hanya jika $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$.

(30/100)

(b) Dalam ruang Cartesian $\mathbb{R}^n$, buktikan bahawa n vektor berikut:

$$\vec{x}_1 = (1,1,1,...,1,1)$$
$$\vec{x}_2 = (0,1,1,...,1,1)$$
$$\vec{x}_3 = (0,0,1,...,1,1)$$
$$\vdots$$
$$\vec{x}_n = (0,0,0,...,0,1)$$

adalah tak bersandar linear.

(30/100)

(c) Dalam ruang vektor berdimensi tiga, katakan $\vec{V}_1$ dan $\vec{V}_2$ adalah dua vektor yang tidak sifar dan tak bersandar linear. Bagi setiap kenyataan-kenyataan yang berikut berikan tafsiran geometrisnya dan buktikannya secara aljebra:

(i) Tiada skalar-skalar α dan β supaya $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2$.

(ii) $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 \times (\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) \neq 0$

(iii) vektor-vektor $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ dan $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ menjadi suatu landasan bagi ruang vektor itu.

(iv) jika $\vec{A}.\vec{V}_1 = 0$ dan $\vec{A}.\vec{V}_2 = 0$, maka $\vec{A} = \gamma(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)$, dimana γ adalah suatu nombor nyata.

(40/100)

2. (a) Katakan keupayaan elektrikan bagi suatu cas titik diberi oleh:

$$\varphi(r) = \frac{q}{r^{1-\varepsilon}}, \qquad |\varepsilon| << 1$$

perhitungkan (bagi $r \neq 0$)

(i) $\vec{E} = -\nabla\varphi$

(ii) $\nabla.\vec{E} = -\nabla^2\varphi$

(iii) $\nabla \times \vec{E}$

dan terbitkan suatu analog bagi hukum Gauss untuk suatu rantau sfera yang jejarinya R.

(40/100)

(b) Suatu sistem fizikal, yang dikenali dengan nama meson vektor, terdiri dari tiga medan-medan vektor $\vec{E}$, $\vec{H}$ dan $\vec{A}$, dan satu medan skalar λ yang memenuhi persamaan-persamaan berikut:

$$\nabla.\vec{E} = -m^2\lambda$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - m^2\vec{A} \qquad (m^2 \text{ pemalar positif})$$

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\vec{V}$$

(i) Tunjukkan bahawa $\nabla.\vec{A} + \frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0$.

(ii) Tunjukkan bahawa $\vec{V}$ memenuhi persamaan

$$\nabla^2\vec{V} - m^2\vec{V} - \frac{\partial^2\vec{V}}{\partial t^2} = 0$$

(iii) Jika dalam suatu permukaan tertutup $\vec{V}$ tidak bersandar pada masa, t, dan $\vec{V}$ terhapus atas permukaan tertutup ini, tunjukkan bahawa $\vec{V} = 0$ dalam permukaan tertutup ini.

(40/100)

(c) Buktikan teorem Green

$$\int_\Gamma (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\,d\Gamma = \int_\sigma (\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi).d\vec{\sigma}$$

Disini σ adalah suatu permukaan tertutup, Γ isipadu yang terkandung dalam σ dan $\vec{\sigma} = \vec{n}d\sigma$ dimana $\vec{n}$ adalah vektor unit normal pada unsur permukaan $d\sigma$.

(20/100)

3. (a) Jika, dalam $\mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y,z)$ adalah suatu skalar yang tak varian (invariant) terhadapan suatu transformasi ortogon adakah vektor $\nabla\varphi$ juga tak varian terhadap transformasi ini? Jelaskan jawapan anda.

(30/100)

(b) Vektor $\vec{V}$ diberi oleh

$$\vec{V} = (x+2y+az)\hat{i} + (bx-3y-z)\hat{j} + (4x+cy-2z)\hat{k}$$

Dapatkan pemalar-pemalar a, b dan c supaya $\nabla \times \vec{V} = 0$.

(40/100)

(c) Buktikan kenyataan-kenyataan berikut:

(i) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{d\Gamma}{r^2} = \int_\sigma \frac{\vec{r}.\vec{n}}{r^2}\,d\sigma$

(ii) $\displaystyle\int_\sigma r^5\vec{n}d\sigma = \int_\Gamma 5r^3\vec{r}d\Gamma$

(iii) $\displaystyle\int_\sigma \vec{n}d\sigma = 0$ bagi setiap permukaan tertutup σ

(30/100)

...4/-

4. (a) Matriks-matriks spin Pauli ditakrifkan seperti berikut:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

($i = \sqrt{-1}$). Buktikan bahawa:

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij} \text{ dan } \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

dan tunjukkan bahawa matrik-matrik Pauli itu "anticommute".

(30/100)

(b) Beri satu contoh matriks antisimetrikan tertib dua yang tidak singular. Buktikan bahawa setiap matriks antisimetrikan tertib tiga adalah singular. Selanjutnya, buktikan pula semua matriks antisimetrikan tertib ganjil adalah singular.

(40/100)

(c) Dapatkan nilai-nilai eigen bagi

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ -6 & -10 & -16 \\ -4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

dan juga vektor-vektor eigen bagi nilai-nilai eigen itu.

(30/100)

5. Kenyataan: Jika $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n$ adalah landasan ortonormal bagi ruang vektor V dan X sebarang vektor dalam V, maka

$$X = \sum_{i=1}^{n} (X.\vec{e}_i)\vec{e}_i \qquad (1)$$

(a) Buktikan kenyataan di atas.

(20/100)

(b) Berikutan persamaan (1) di atas takrifkan satu <u>operator pengunjuran</u> P_i, yang mengubah vektor X kepada X', seperti

$$X' = P_i X \equiv \vec{e}_i (X.\vec{e}_i)$$

Buktikan

(i) P_i itu "idempotent"

(ii) $P_i P_j = 0$ bagi $i \neq j$, dan berikan tafsiran geometris.

(iii) P_i tiada songsangan

(iv) $\sum_{i=1}^{n} P_i = I$

(v) P_i itu Hermitian.

(80/100)

- ooo00ooo -