UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1992/93

Oktober/November 1992

ZMC 211/3 - Kaedah Matematik II

Masa : (3 jam)

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua EMPAT soalan.
Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1.(a) Jika $\underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{C}$, bolehkah kita simpulkan bahawa $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C}$? Terangkan. (10/100)

(b) Jika $\underset{\sim}{A}$ dan $\underset{\sim}{B}$ ialah dua vektor sembarangan, tunjukkan bahawa

$$|\underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{B}| \leq |\underset{\sim}{A}||\underset{\sim}{B}| \qquad (10/100)$$

Beri nama ketaksamaan ini.

(c) Tunjukkan bahawa $\underset{\sim}{A}$ selari dengan $\underset{\sim}{B}$ jika dan hanya jika $\underset{\sim}{A} \times \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{O}$.
(10/100)

(d) Diberi vektor $\underset{\sim}{a}_1$, $\underset{\sim}{a}_2$ dan $\underset{\sim}{a}_3$, katakan

$$\underset{\sim}{b}_1 = \frac{\underset{\sim}{a}_2 \times \underset{\sim}{a}_3}{[\underset{\sim}{a}_1\underset{\sim}{a}_2\underset{\sim}{a}_3]} \qquad \underset{\sim}{b}_2 = \frac{\underset{\sim}{a}_3 \times \underset{\sim}{a}_1}{[\underset{\sim}{a}_1\underset{\sim}{a}_2\underset{\sim}{a}_3]}$$

$$\underset{\sim}{b}_3 = \frac{\underset{\sim}{a}_1 \times \underset{\sim}{a}_2}{[\underset{\sim}{a}_1\underset{\sim}{a}_2\underset{\sim}{a}_3]}$$

di sini $[\underset{\sim}{a}_1\underset{\sim}{a}_2\underset{\sim}{a}_3] \neq 0$. Tunjukkan bahawa $\underset{\sim}{a}_m.\underset{\sim}{b}_n = \delta_{mn}$ dan δ_{mn} ialah delta kronecker yang ditakrif sebagai

$$\delta_{mn} \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

(30/100)

(e) Dengan menggunakan perwakilan komponen bagi vektor, tunjukkan bahawa

$$\underset{\sim}{A} \times (\underset{\sim}{B} \times \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{C})\underset{\sim}{B} - (\underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{B})\underset{\sim}{C}$$ (40/100)

2.(a) Tunjukkan bahawa

$$\frac{d}{dt}[\phi(t)\underset{\sim}{A}(t)] = \phi(t)\underset{\sim}{A}'(t) + \phi'(t)\underset{\sim}{A}(t)$$

di sini $\underset{\sim}{A}(t)$ ialah suatu fungsi vektor yang terbezakan dan $\phi(t)$ ialah suatu fungsi skalar yang terbezakan.

(15/100)

(b) Diberi $\underset{\sim}{R} = \sin t\,\underset{\sim}{i} + \cos t\,\underset{\sim}{j} + t\,\underset{\sim}{k}$

cari (i) $\frac{d\underset{\sim}{R}}{dt}$ (ii) $\frac{d^2\underset{\sim}{R}}{dt^2}$

(iii) $\left|\frac{d\underset{\sim}{R}}{dt}\right|$ (iv) $\left|\frac{d^2\underset{\sim}{R}}{dt^2}\right|$

(15/100)

(c) Tunjukkan bahawa

$$\underset{\sim}{A}\cdot\frac{d\underset{\sim}{A}}{dt} = A\,\frac{dA}{dt}$$

di sini $A = |\underset{\sim}{A}|$

(10/100)

(d) Jika $\phi(x,y,z) = xy^2z$ $\underset{\sim}{A} = xz\underset{\sim}{i} - xy^2\underset{\sim}{j} + yz^2\underset{\sim}{k}$

Cari $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(\phi\underset{\sim}{A})$ pada titik (2, -1, 1). (15/100)

(e) Buktikan bahawa jejari kelengkungan ρ bagi lengkung yang mempunyai persamaan berparameter $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ diberi oleh

$$\rho = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

(10/100)

(f) Vektor tangen unit $\underset{\sim}{T}$, vektor normal prinsipal unit $\underset{\sim}{N}$ dan vektor binormal unit $\underset{\sim}{B}$ membentuk suatu sistem koordinat segiempat tepat, buktikan formula Frenet-Sernet

$$\frac{d\underset{\sim}{N}}{ds} = \tau\underset{\sim}{B} - k\underset{\sim}{T}$$

disini k ialah kelengkungan lengkung pada sebarang titik.

(15/100)

(g) Tunjukkan bahawa

$$\frac{d\underset{\sim}{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\underset{\sim}{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\underset{\sim}{r}}{ds^3} = \frac{\tau}{\rho^2}$$

di sini τ ialah kilasan lengkung.

(20/100)

3. (a) Beri takrif kecapahan dan kemudian nyatakan teorem kecapahan atau teorem Gauss.

(10/100)

(b) Buktikan teorem kecapahan. (40/100)

(c) Jika $\underset{\sim}{f} = P(x,y,z)\underset{\sim}{i} + Q(x,y,z)\underset{\sim}{j} + R(x,y,z)\underset{\sim}{k}$ dan R ialah rantau yang dibatasi oleh permukaan tertutup S, tunjukkan bahawa teorem kecapahan diungkapkan di dalam koordinat segiempat tepat ialah

$$\iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdydz$$

$$= \iint_S (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy)$$

(30/100)

(d) Nilaikan $\iint_S \underset{\sim}{f}.\underset{\sim}{n}\, ds$

di sini $f = 4xzi - y^2j + yzk$ dan S ialah permukaan kubus yang dibatasi oleh x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1.

(20/100)

4. $\underset{\sim}{e}_u$, $\underset{\sim}{e}_v$, $\underset{\sim}{e}_w$ ialah vektor asas dan h_u, h_v dan h_w ialah faktor skala di dalam sistem melengkung linear berortogon.

   (a) Vektor kedudukan bagi suatu titik di dalam sistem ini diperihalkan oleh $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r}\,(u,v,w)$. Dapatkan $d\underset{\sim}{r}$, ds^2 dan dV dengan sebutan vektor unit dan faktor skala di atas. Di sini ds^2 ialah kuasa dua unsur garis dan dV ialah unsur isipadu.

   (20/100)

   (b) Sistem koordinat sfera ditakrif melalui transformasi $x = u \sin v \cos w$, $y = u \sin v \sin w$, $z = u \cos v$ di sini $u \geq 0$, $0 \leq v < \pi$, $0 \leq w < 2\pi$.

   Cari faktor-faktor skala h_u, h_v, h_w dan vektor-vektor unit e_u, e_v, e_w.

   (45/100)

   (c) Buktikan bahawa sistem koordinat sfera ini berortogon.

   (15/100)

   (d) Dapatkan Jacobian bagi transformasi di dalam soalan (b) dan terangkan mengapa Jacobian untuk transformasi ini tidak boleh menjadi sifar.

   (20/100)

- oooOOooo -