UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1986/87

ZMC 210/3 - Kaedah Matematik I

Tarikh: 14 April 1987 Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari
(3 jam)

Jawab KESEMUA EMPAT soalan.
Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Anggapkan f tertakrif dalam suatu sekitar mengandungi x dan anggapkan f"(x) wujud. Tunjukkan

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x),$$

dan tunjukkan, melalui contoh, bahawa had ini mungkin wujud walaupun f"(x) tidak wujud.

(20/100)

(b) Katakan fungsi f tertakrif bagi semua x nyata dan anggapkan bahawa

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$$

bagi semua x dan y nyata. Buktikan f itu pemalar.

(40/100)

(c) Takrifkan

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

Buktikan bahawa f mempunyai terbitan bagi setiap tertib pada x = 0, dan juga bahawa $f^{(x)}(0) = 0$ bagi u = 1,2,3,...

(40/100)

2. (a) Katakan $f(x)f(y) = f(x+y)$ bagi semua x dan y nyata. Anggapan bahawa f boleh dibeza dan f tidak sifar, lalu buktikan bahawa

$$f(x) = e^{cx}, \qquad c \text{ sebarang pemalar}$$

(20/100)

(b) Terdapat dua fungsi nyata $g(x)$ dan $h(x)$ yang memenuhi syarat-syarat:

1. $g^{(n)}(x)$ dan $h^{(n)}(x)$ wujud bagi $n = 1,2,3,\ldots$

2. $g'(x) = -h(x)$ dan $h'(x) = g(x)$

3. $g(0) = 1$ dan $h(0) = 0$.

(i) Dapatkan perkembangan siri Taylor bagi $g(x)$ dan $h(x)$.

(ii) Perhubungkan $g(x)$ dan $h(x)$ dengan fungsi e^x.

(iii) Tunjukkan bahawa $g(x)$ dan $h(x)$ adalah fungsi berkala dan kalanya 2π.

(40/100)

(c) Diketahui bahawa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{h^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \text{ jika } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Menggunakan ini, terbitkan formula-formula berikut:-

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

(40/100)

3. (a) Katakan f mempunyai terbitan hingga tertib n pada titik $x = 0$. Bentukkan satu polinom, P, darjah n supaya

$$P(0) = f(0),\ P'(0) = f'(0),\ \ldots,\ P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

Adakah polinom ini unik? Jelaskan.

(40/100)

(b) Setelah kita mendapat polinom diatas kita boleh menganggapkan bahawa polinom itu berkelakuan sama dengan $f(x)$ di titik $x = 0$. Sekarang kita gantikan titik $x = 0$ dengan sebarang titik $x = x_o$, lalu kita boleh menganggapkan bahawa polinom, $P(x)$ itu, menghampiri fungsi $f(x)$ dalam suatu sekitar mengandungi x_o yakni

$$f(x) = P(x) + R_n(x)$$

dimana $R_n(x)$ itu adalah baki $f(x) - P(x)$. Dapatkan ungkapan bagi $R_n(x)$.

(40/100)

(c) Nyatakan syarat-syarat atas $P(x)$ dan $R_n(x)$ supaya fungsi $f(x)$ itu analitik. Bagaimana pula sekira $P(x)$ itu suatu siri kuasa tak terhingga tetapi $R_n(x)$ pula tidak memenuhi syarat

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0.$$

(20/100)

4. (a) Selesaikan persamaan-persamaan pembezaan berikut:

(i) $y' = \alpha y$,

(ii) $y'' = xy$,

(iii) $y'' + xy' + y = 0$.

($y = y(x)$ dan α = sebarang pemalar).

(30/100)

(b) Dapatkan penyelesaian-penyelesaian J_o bagi persamaan Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$$

(30/100)

...4/-

(c) Bagi nombor nyata α tertentu, takrifkan f_α seperti

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \qquad |x| < 1$$

(i) Buktikan $f'_\alpha(x) = \alpha f_{\alpha-1}(x)$.

(ii) Tunjukkan bahawa

$$(1+x)f'_\alpha(x) = \alpha f_\alpha(x), \qquad |x| < 1$$

dan selesai persamaan ini.

(40/100)

- oooOOooo -