

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1988/89

ZMC 210/3 - Kaedah Matematik I

Tarikh: 3 November 1988

Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengah hari
(3 jam)

Jawab MANA-MANA LIMA soalan sahaja.
Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Buktikan

$$(i) (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(ii) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$(iii) r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = r_3 e^{i\theta_3}$$

di mana

$$r_3 = [r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]^{\frac{1}{2}};$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2} \right)$$

(30/100).

(b) Kalau α kompleks dan β hakiki, tunjukkan bahawa persamaan $\alpha z + (\alpha z)^* = \beta$ ialah suatu garis lurus. Nyatakan pula kecerunan dan pintasan garis lurus itu. Apakah nilai α dan β kalau garis lurus mempunyai bentuk $y = 3 - x$.

(30/100)

(c) Kalau $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

(i) Dapatkan bentuk kutub bagi z .

(ii) Dapatkan kesemua punca kuasa ke-4 bagi z dan tunjukkan punca-punca itu di dalam gambarajah Argand.

- (iii) Dapatkan juga punca kuasa ke $-(4/3)$ bagi z .
(40/100)

2. (a) Sebutkan dan lakarkan lokus atau kawasan yang diwakili oleh

(i) $|z - z_0| = |z_0 - 3(1 + i)|$

(ii) $(1 + i)z + (1 - i)z^* < 6$

(iii) $1 < |z + i| < 2$.
(30/100)

- (b) Diberikan $u = e^{-y/2} \sin \alpha x$, di mana α ialah suatu pemalar

(i) Carilah nilai α supaya u harmonik.

(ii) Carilah v supaya $f = u + iv$ analitik.
(30/100)

- (c) Nilaikan kamilan

$$\int_c (z^2 - 2z + 3) dz$$

di mana c ialah setengah yang atas bagi $|z| = 2$.
Apakah bezanya kalau kamilan dinilaian melalui setengah yang bawah bagi $|z| = 2$.

(40/100)

3. (a) Nilaikan kamilan

$$\int_c \frac{e^z dz}{z^2 - 4}$$

bagi lintasan yang berikut:

- (i) c : setengah yang atas bagi $|z + 2| = 1$.
(ii) c : setengah yang bawah bagi $|z + 2| = 1$.
(iii) c : bulatan unit $|z + 2| = 1$.

(40/100)

(b) Diberikan fungsi kompleks $f(z) = \frac{1}{z(z+3)^3}$.

- (i) Nyatakan titik singular bagi $f(z)$.
- (ii) Dapatkan siri Laurent bagi $f(z)$ terhadap titik-titik singularnya dan sebutkan kawasan di mana siri-siri itu bertumpu.
- (iii) Nilaikan kamilan

$$\oint_c f(z) dz$$

di mana $c : |z + 2| + |z - 2| = 6$.

(60/100)

4. (a) Isipadu tumor pejal V berkembang dengan masa t menurut persamaan pembezaan

$$\frac{dV}{dt} = \lambda e^{-\alpha t} V$$

di mana λ dan α ialah pemalar.

- (i) Selesaikan persamaan pembezaan tersebut.
- (ii) Dapatkan selang masa untuk tumor itu mengkalidukan isipadunya.
- (iii) Kalau isipadu pada $t = 0$ ialah 10^{-3} cm^3 dan $\lambda = 0.2$ dan $\alpha = 0.02$, berapakah isipadu maksimum tumor itu.

(50/100)

(b) Pertimbangkan sistem jisim m yang terikat pada hujung sesuatu spring. Sistem itu berayun di dalam suatu bahantara dan daya rintangan yang dihadapi berkadar terus dengan kelajuan seketika gerakan. Kalau panjang asli spring l dan pemalar spring k

- (i) Rumuskan masalah ini di dalam sebutan persamaan pembezaan.
- (ii) Bincangkan penyelesaian-penyelesaian yang mungkin, merujuk kepada m , k dan daya rintangan.

(iii) Kalau daya rintangan sangat kecil, bincangkan keputusan yang diperolehi.

(50/100)

5. (a) Persamaan gerakan bagi suatu lontaran yang menghadapi rintangan atmosfera (αv) ialah:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -k\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -k\dot{y} - mg \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x(0) &= y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) &= v_0 \cos \alpha = U \\ \dot{y}(0) &= v_0 \sin \alpha = V \end{aligned}$$

di mana α ialah sudut pelontaran dari paras mengufuk, g ialah pecutan graviti dan k pemalar.

(i) Selesaikan kedua-dua persamaan gerakan.

(ii) Tunjukkan masa T yang diperlukan untuk keseluruhan trajektori diberikan dengan ungkapan

$$T = \frac{kV + g}{gk} (1 - e^{-kT})$$

(50/100)

(b) Dapatkan suatu penyelesaian siri kuasa bagi persamaan

$$y'' - xy = 0$$

Sebutkan jawapan anda sehingga kuasa x^7 .

(50/100)

6. Keadaan sesuatu osilator harmonik dihuraikan dengan

$$\psi(q) = e^{-\frac{1}{2}q^2} H(q)$$

di mana $H(q)$ mematuhi persamaan pembezaan

$$H''(q) - 2q H'(q) + (\epsilon - 1)H(q) = 0$$

...5/-

- (a) Dengan Kaedah Frobenius dapatkan dua penyelesaian yang tak bersandaran, sepadan dengan dua punca yang berlainan bagi persamaan indeks.
- (b) Kajikan sama ada kedua-dua siri bertumpu.
- (c) Kalau didapati bahawa sesuatu keadaan osilator bersamaan

$$\psi(q) = e^{-\frac{1}{2}q^2} \left[q + \frac{(3 - \epsilon)}{6} q^3 \right]$$

Apakah tenaga E yang bersepadan.
[Diberikan $\epsilon = 2E/\hbar\omega$; \hbar dan ω pemalar].

(100/100)

- ooo0qoo -

