

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1991/92

Oktober/November 1991

ZMC 210/3 - Kaedah Matematik I

Masa : [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini. Jawab KESEMUA EMPAT soalan. Kesemuanya wajib dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

1. Nilaikan:

(a) $\left| \frac{1 + 2i}{-2 - i} \right|$ (5/100)

(b) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^4 - 1}$ (5/100)

(c) $\int_C \frac{\sin z}{z^2(z-4)} dz;$ $C: |z| = 2$ (10/100)

(d) $\oint \tan z dz;$ $C: |z| = 2\pi$ (20/100)

(e) $\oint \frac{3z + 2}{z^4 + 1} dz;$ $C: |z| = 3$ (20/100)

(f) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin\theta}$ (20/100)

...2/-

(g) $f^{(6)}(0)$ kalau $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k^3}{3^k}\right) z^k$,

(20/100)

2. (a) Dapatkan tiga sebutan pertama (yang bukan sifar) dalam perkembangan Maclaurin bagi fungsi $e^z \cos z$.

(20/100)

- (b) Dapatkan perkembangan siri Laurent bagi fungsi

$$\frac{z}{(z+1)(z-2)} \text{ untuk } 1 < |z| < 2$$

(30/100)

- (c) Jikalau u dan v boleh diungkapkan dalam bentuk berkutub (r, θ) , tunjukkan bahawa persamaan Cauchy-Riemann boleh ditulis sebagai

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

dan $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$

(30/100)

- (d) Tentukan sama ada bahagian-bahagian hakiki dan khayalan fungsi $f(z)$ masing-masing adalah harmonik atau tidak kalau $f(z) = z^2 + 2z + 1$.

(20/100)

3. (a) Selesaikan persamaan-persamaan pembezaan yang berikut:

(i) $\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

(ii) $x^2 y'' - 6y = 0; y(1) = 2, y'(1) = 0$

(20/100)

- (b) Tunjukkan bahawa persamaan $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ boleh ditransformkan kepada $u'' + f(x)u = 0$ dengan membiarkan $y = u(x)v(x)$, untuk sebarang $v(x)$.

Kemudian, selesaikan persamaan

$$y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$$

(30/100)

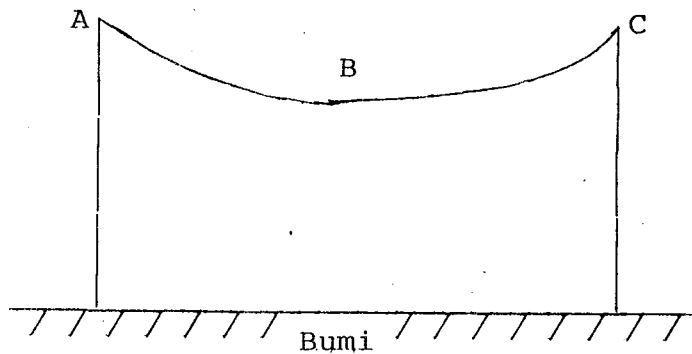
(c) Kecerunan bagi suatu garis lengkung ialah

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$$

Tentukan persamaan garis lengkung ini jika ia melalui titik (1,1).

(20/100)

(d)



Suatu tali ABC adalah tergantung antara dua tiang seperti yang ditunjukkan dalam gambarajah di atas. Dengan menggunakan gambarajah daya, tentukan bentuk garis lengkung bagi tali ini.

(30/100)

4. (a) Dapatkan penyelesaian bagi persamaan Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (4x^2 - 1)y = 0,$$

yang mempunyai sempadan di $x = 0$ dan mematuhi syarat $y(2) = 5$.

(30/100)

(b) Tunjukkan bahawa

$$(i) J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2 (1!)^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + \dots$$

(ii) $J_n'(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$

$$[J_n(x) = \frac{(\frac{x}{2})^n}{\Gamma(n+1)} - \frac{(\frac{x}{2})^{n+2}}{1!\Gamma(n+2)} + \frac{(\frac{x}{2})^{n+4}}{2!\Gamma(n+3)} - \frac{(\frac{x}{2})^{n+6}}{3!\Gamma(n+4)} + \dots]$$

(20/100)

(c) Dapatkan penyelesaian bagi persamaan Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0,$$

yang mematuhi syarat-syarat $-1 \leq x \leq 1$ dan $y(0.5) = 10$.

(30/100)

(d) Tunjukkan bahawa

(i) $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

(ii) $P_{n+1}'(x) - P_n'(x) = (n+1)P_n(x)$.

$$[P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n]$$

(20/100)

- oooOooo -