UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1993/94

April 1994

MKT 341 - Pengiraan Kejuruteraan I

[Masa: 3 Jam]

Jawab **tiga (3)** soalan.

1. (a) Dengan menggunakan siri Taylor, tunjukkan:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

Tuliskan ralat-ralatnya.

(15/100)

(b) Fungsi g(x) ditakrifkan di dalam selang $I = [a,b]$ menepati

(i) $g(x) \in I$

(ii) g(x) terbezakan dan wujud pemalar K, $0 \le K < 1$, supaya $|g'(x)| \le K$.

Buktikan g(x) mempunyai titik tetap $x^* \in I$ yang unik, dan lelaran

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots$$

dengan $x_1 \in I$ menumpu ke x^*.

Pertimbangan lelaran $x_{i+1} = g(x_i)$ untuk mendapatkan punca nyata unik x^* bagi

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0.$$

... 2/-

Tunjukkan bahawa lelaran

$$x_{i+1} = \frac{-3x_i^3 + 2x_i^2 + 2}{3}$$

menumpu kepada x* bagi sebarang nilai $x_1 \in I = [0, \frac{3}{4}]$.

Walau bagaimanapun, tunjukkan juga bagi $x^* \in [0, \frac{3}{4}]$, lelaran

$$x_{i+1} = \frac{2x_i^2 - 3x_i + 2}{3x_i^2}$$

tidak menepati syarat-syarat di atas.

(50/100)

(c) Petua $\frac{1}{3}$ Simpson untuk menganggar kamiran diberikan sebagai

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

dengan ralatnya $\frac{-h^5}{90} f^4(\rho)$, $a < \rho < b$ dan $h = \frac{b-a}{2}$.

Dapatkan petua $\frac{1}{3}$ Simpson gubahan apabila $h = \frac{b-a}{n}$, dan tuliskan ralatnya.

Gunakan petua gubahan ini untuk menganggar

$$\int_{0.0}^{0.8} \frac{1}{(1+x)} dx \quad , \quad \text{dengan } h = 0.2.$$

(35/100)

2. (a) Tuliskan polinomial $\ell_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$ supaya polinomial

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x) \qquad \text{(i)}$$

menginterpolasi f(x) di titik x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Buktikan hanya $P_n(x)$ sahaja merupakan polinomial berdarjah tidak lebih dari n yang menginterpolasi data tersebut (unik).

Terangkan cara untuk memperolehi $a_0, a_1, \ldots a_n$ supaya $P_n(x)$ boleh diungkapkan sebagai

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \qquad \text{(ii)}$$

Jelaskan mengapa bentuk (ii) lebih sesuai.

(40/100)

(b) Bagi sistem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{pmatrix}$$

(i) Tentukan nombor suasana dengan menggunakan norma -∞.

(ii) Diketahui vektor $\underline{x}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah suatu penyelesaian hampiran, gunakan kaedah pembaikan lelaran untuk mengira $\underline{x}^2$ dan $\underline{x}^3$.

(35/100)

(c) Bincangkan kaedah-kaedah

(i) Penghuraian LU

(ii) Gauss-Seidel

untuk menyelesaian sistem persamaan linear.

(25/100)

3. (a) Huraikan proses kaedah penghapusan Gauss

(i) tanpa pemangsian

(ii) dengan pemangsian.

Jelaskan huraian anda dengan menyelesaikan persamaan

$$\begin{aligned} 0.0001x_1 + 1.00x_2 &= 1.00 \\ 1.00x_1 + 1.00x_2 &= 2.00 \end{aligned}$$

menggunakan aritmetik-3 digit dengan pembulatan.

(30/100)

(b) Bagi sistem berikut

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 3.58 \\ 6.79 \\ 9.18 \end{pmatrix}$$

Gunakan kaedah Gauss-Seidel untuk mendapatkan anggaran penyelesaian dengan $\underline{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan jalankan 3 lalaran. Jelaskan ketumpuan ketiga-tiga lelaran, dan bagi lelaran ketiga $\underline{x}^3$ cari sisanya.

(35/100)

(c) Dengan menggunakan beza kebelakang Newton

$$f(x_r + sh) = f(x_r) + s\nabla f(x_r) + \frac{s(s-1)}{2!}\nabla^2 f(x_r) + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\nabla^3 f(x_r) + \ldots$$

dapatkan rumus kaedah multi-langkah Adams-Bashford dan Adams-Moulton sehingga peringkat 4.

Bincangkan bagaimana kita dapat gunakan kedua-dua kaedah ini untuk menyelesaikan persamaan

$$y' = 1 - x + y \ , \ y(o) = 1.$$

(35/100)

4. (a) Katakan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ dan $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$.

Dengan menggunakan aruhan, buktikan $\Delta^n f(x) = a_n h^n n!$

(35/100)

(b) Andaikan $g(x) \in c^k$, maka tuliskan sifat-sifat bagi lelaran titik tetap $x_{i+1} = g(x_i)$ mempunyai peringkat penumpuan k. Buktikan kaedah Newton-Raphson mempunyai penumpuan kuadratik.

(35/100)

(c) Bincangkan mengenai

(i) Kaedah Euler

(ii) Kaedah Runge-Kutta peringkat 4.

untuk menganggar penyelesaian persamaan pembezaan biasa.

(30/100)

-ooo00ooo-