UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1987/88

MKT342 - Pengiraan Kejuruteraan II

Tarikh: 10 April 1988

Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengahari
(3 jam)

Jawab SEMUA soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Untuk setiap $\underline{x} \varepsilon R^n$, buktikan bahawa

$$||\underline{x}||_\infty \leqslant ||\underline{x}||_2 \leqslant \sqrt{n}\ ||\underline{x}||_\infty .$$

(20/100)

(b) Untuk matriks $A \varepsilon M_{n\times n}$, kaedah kuasa merupakan kaedah lelaran berbentuk

$$\underline{y}^{k+1} = \frac{1}{m_{k+1}} A\,\underline{y}^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

di mana $\underline{y}^0$ diberikan supaya $||\underline{y}^0||_\infty = 1$, dan $m_{k+1} = ||A\,\underline{y}^k||_\infty$. Jika A mempunyai n vektor eigen yang tak bersandar secara linear, dan $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, $i = 2, \ldots, n$, buktikan bahawa m_{k+1} menumpu kepada nilai eigen λ_1 dan $\underline{y}^{k+1}$ menumpu kepada vektor eigen sepadan dengan λ_1.

(45/100)

(c) Bincangkan mengenai

(i) Kaedah deflasi Wielandt.

(ii) Kaedah tembak linear.

(35/100)

.../2

2. (a) Buktikan bahawa persamaan pembezaan peringkat kedua

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2t}\sin t\,,\quad 0 \leq t \leq 1$$

dengan syarat awalan $y(0) = -.4$, $y'(0) = -.6$ mempunyai penyelesaian unik.

Terangkan secara ringkas bagaimana kita dapat menyelesaikannya secara berangka.

(45/100)

(b) Dengan menggunakan penghampiran beza pusat di atas jaring seragam $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, N+1$, di mana $h = 1/(N+1)$, binakan skema beza terhingga untuk masalah nilai sempadan

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(1+x)}\frac{dy}{dx}\right] - y = r(x)$$
$$0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = \alpha$$
$$y(1) = \beta$$

Jika $y(x) \in C^4[0, 1]$, tunjukkan bahawa

$$|u_j - y(x_j)| \leq \left(\frac{M_4 + 2M_3}{12}\right) h^2,\ j = 1, 2, \ldots, N$$

di mana $M_i = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |y^{(i)}(x)|$ dan u_j menandakan penghampiran beza terhingga kepada $y(x)$ pada $x = x_j$.

(55/100)

3. (a) Tuliskan skema tak tersirat untuk masalah persamaan pembezaan separa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\quad 0 \leq x \leq 1,\quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x)\,,\quad 0 \leq x \leq 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = h_1(u - v_1),\ x = 0,\ t \geq 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -h_2(u - v_2),\ x = 1,\ t \geq 0$$

di mana h_1, h_2 v_1 dan v_2 adalah pemalar, dan $h_1 \geq 0$, $h_2 \geq 0$. Gunakan beza pusat untuk menganggar syarat sempadan.

..../3

Gunakan teorem Gerschgorin untuk menunjukkan bahawa skema tersebut stabil untuk semua $\lambda = \frac{\delta t}{\delta x^2}$ yang menepati

$$\lambda \leq \min \left\{ \frac{1}{(2+h_1\delta x)} , \frac{1}{(2+h_2\delta x)} \right\} .$$

(60/100)

(b) Persamaan parabolik

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dianggarkan pada titik (ph, qk) oleh persamaan beza terhingga

$$\frac{(u_{p,q+1} - u_{p,q})}{k} = \frac{(u_{p-1,q+1} - 2u_{p,q+1} + u_{p+1,q+1})}{h^2}$$

Dengan mengambil $r = \frac{k}{h^2}$ sebagai parameter, bincangkan mengenai kestabilan skema ini menggunakan kaedah Von Neumann.

(40/100)

4. (a) Jika μ ialah nilaieigen matriks lelaran Jacobi $D^{-1}(L + U)$, dan λ ialah nilaieigen matriks lelaran SOR $(1 - \omega D^{-1})^{-1}$ $\{(1 - \omega)I + \omega D^{-1} u\}$, tunjukkan bahawa

(i) $\det(\mu D - L - U) = 0$

(ii) $\det(kD - \lambda\omega L - \omega U) = 0$,

di mana $k = \lambda + \omega - 1$.

(40/100)

(b) Bagi persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ di dalam } \Omega ,$$

...$/4$

syarat sempadan $u(x, y)$ diberikan, dan Ω ialah segiempat sama dengan jaring bersaiz h.

Dapatkan skema 5 titik untuk persamaan di atas.

Jika $\Omega = \{(x,y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, \ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$, dengan syarat sempadan

$$u(x,y) = 0 \text{ di atas } x = \pm 1$$

$$u(x,y) = 80(1 - x^2) \text{ di atas } y = \pm 1$$

$$h = 0.5$$

tuliskan skema 5 titik di dalam bentuk matriks. Terangkan bagaimana anda dapat menyelesaikan masalah tersebut (anda tidak perlu menyelesaikannya).

(60/100)

- ooOoo -