UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1987/88

MKT242 - Pengiraan Kejuruteraan

Tarikh: 12 April 1988

Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengahari
(3 Jam)

Jawab mana-mana EMPAT soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Tunjukkan bahawa persamaan $f(x) = \cos x - x = 0$ mempunyai satu dan satu sahaja punca di antara $x = 0$ dan $x = 1$. Cari punca ini melalui kaedah Newton dengan nilai permulaan $x_0 = \frac{\pi}{4} = 0.785398$. Jalankan 4 lelaran sehingga mendapat x_1, x_2, x_3, x_4. Apakah punca yang jitu sehingga 6 digit? Adakah ketumpuan ini kuadratik? Terangkan.

(b) Tulis suatu subrutin dalam bahasa FORTRAN untuk menjalankan kaedah Newton tersebut di atas. Juga sertakan FUNCTION yang berpatutan bagi soalan di atas. Akhirnya tulis suatu program utama yang dapat menyelesaikan soalan ini. Program ini mesti tamat jika $|x_n - x_{n+1}| < 10^{-4}$, atau $|f(x_n)| < 10^{-5}$ ataupun selepas 10 lelaran.

(c) Pertimbangkan sistem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 3.15 \\ 2.45 \\ 2.75 \end{pmatrix}$$

Gunakan kaedah Gauss-Seidel dengan penyelesaian permulaan $\underset{\sim}{x}_0^T = (1, 1, 1)$ untuk mendapatkan 3 penyelesaian lelaran berturut-turut, iaitu $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \underset{\sim}{x}_3$.
Adakah lelaran-lelaran ini akan menumpu ke penyelesaian tepat? Mengapa? Apakah penyelesaian tepat ini?

(100/100)

.../2

2. (a) Huraikan $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 4.5 \end{pmatrix}$

ke dalam bentuk $A = LU$.

Kemudian selesaikan sistem

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8.25 \end{pmatrix} \quad \text{dan juga} \quad A\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} 4.4 \\ 6.5 \\ 8.9 \end{pmatrix}.$$

Apakah hubungan di antara $\|\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{c}\|_\infty$ dan $\|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}\|_\infty$?

Bincangkan tentang kesihatan sistem $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$.

(b) Pertimbangkan sistem $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ seperti berikut.

$$\begin{aligned} 6.02x_1 - 6.06x_2 &= -0.04 \\ -5.98x_1 + 6.01x_2 &= 0.03 \end{aligned}$$

(i) Dapatkan penyelesaian dengan aritmetik 6 digit. Lambangkan ini oleh $\underset{\sim}{x}$, dan terima ini sebagai penyelesaian tepat.

(ii) Dengan aritmetik 3 digit, dapatkan penyelesaian $\underset{\sim}{x}^*$.

(iii) Dapatkan relat $\underset{\sim}{e}$ dan sisa $\underset{\sim}{r}$ bagi penyelesaian $\underset{\sim}{x}^*$, dan norma $\|\underset{\sim}{e}\|_\infty$, $\|\underset{\sim}{r}\|_\infty$.

(iv) Kirakan nombor suasana $\rho(A)$.

(v) Berikan suatu hubungan di antara $\|\underset{\sim}{e}\|_\infty$, $\|\underset{\sim}{r}\|_\infty$ dan $\rho(A)$, dan bincangkan hubungan ini di dalam konteks soalan ini. Juga buktikan hubungan ini.

(100/100)

3. (a) Suatu fungsi $f(x)$ telah diberikan seperti berikut:

x	f(x)
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103632

.../3

(i) Bentukkan jadual beza sehingga $\Delta^4 f$.

(ii) Cari nilai f(1.1) dan f(2.0) yang paling bagus sekali. Berikan ralat masing-masing.

(iii) Cari juga nilai x supaya f(x) = 0.40.

(iv) Gunakan Petua Trapezium dan Simpson $\frac{1}{3}$ untuk mencari $\int_{1.0}^{2.2} f(x)dx$. Sertakan anggaran ralat masing-masing.

Buktikan bahawa ralat petua Simpson $\frac{1}{3}$ ialah $-\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\eta)$, $\eta \in [x_0, x_2]$.

(v) Kirakan f'(2.1) dan f"(2.1). Berikan ralatnya.

3. (b) Gunakan kaedah Lagrange untuk menilaikan f(3.1) jika diberikan f(-1) = 1, f(1) = 1, f(2) = 7, f(4) = 61. Berikan anggaran ralatnya.

Dapatkan polinomial darjah 3 yang melalui keempat-empat titik yang diberikan di atas.

Dapatkan juga f'(1).

(100/100)

4. (a) Suatu fungsi f(x) telah diberikan seperti berikut:

x	f(x)
0.895	0.78021
0.898	0.78208
0.899	0.78270
0.900	0.78333
0.901	0.78395
0.902	0.78457
0.905	0.78643

Dapatkan f'(0.900) dan f"(0.900) melalui rumus memusat dengan h = 0.001, 0.002, 0.005 masing-masing. Berikan dan bincangkan ralat tiap-tiap satu. Berikan f'(0.900) dan f"(0.900) yang paling tepat sekali.

.../4

(b) Buktikan bahawa

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\Delta^n f_0).$$

(c) Bagi persamaan pembezaan

$$y' = -y + t + 1,$$

telah diberikan bahawa

$$y(1) = 1.36788,\ y(1.1) = 1.43287,\ y(1.2) = 1.50119.$$

Dapatkan nilai y(1.3) dengan kaedah Adam-Moulton, dan sertakan anggaran ralatnya.

(100/100)

5\. (a) Pertimbangkan persamaan pembezaan

$$y' = -y + t + 1,\ y(0) = 1.$$

Gunakan kaedah Euler 2 kali berturut-turut untuk mendapatkan y(0.1), dengan h = 0.05. Berikan anggaran ralat.

(b) Bagi persamaan pembezaan tersebut di atas, gunakan kaedah Runge-Kutta peringkat 4 dengan h = 0.1 untuk mendapatkan y(0.1).

Berikan anggaran ralat.

(c) Di antara penyelesaian (a) dan (b), yang mana lebih tepat? Dan mengapa? Terangkan.

(d) Tulis suatu subrutin FORTRAN untuk menjalankan kaedah Runge-Kutta peringkat 4 bagi persamaan pembezaan di atas. Sertakan juga FUNCTION yang berkenaan dan berikan program utama untuk mencari nilai y bagi x = 0 ke x = 1 dengan h = 0.1.

(100/100)

- oo0oo -

Rumus-Rumus

1. $$x_i^{(m+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(m)}$$
$$m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

2. $$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0 + \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

3. $$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2} \Delta^2 f_{-2} + \binom{s+2}{3} \Delta^3 f_{-3} + \binom{s+3}{4} \Delta^4 f_{-4} + \ldots$$

4. $$P_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3} \Delta^3 f_{-1} + \binom{s+1}{4} \Delta^4 f_{-2} + \ldots$$

5. $$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \, \ell_i(x) \text{ dengan } \ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right), \quad 0 \leq i \leq n.$$

6. $$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\Delta f_0 - \tfrac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Delta^n f_0\right) + \frac{(-1)^n}{n+1} h^n f^{(n+1)}(\xi)$$

7. $$Q = F(h) + Ch^n + O(h^m)$$
$$Q \simeq \frac{r^n F(h) - F(h_b)}{r^n - 1}, \quad h_b = rh \quad (r > 1)$$

8. Ralat sejagat petua trapezium
$$= -\frac{1}{12}(b - a)h^2 f''(\xi)$$

9. $$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}h(f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + 2f_5 + \ldots + 2f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}) - \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

10. $$\int_a^b f(x)dx = \frac{3}{8}h(f_1 + 3f_2 + 3f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 3f_6 + \ldots + 2f_{n-2} + 3f_{n-1} + 3f_n + f_{n+1}) - \frac{(b-a)}{80} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

11. $$y_{n+1} = y_n + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6.0$$
$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$K_2 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}K_1)$$
$$K_3 = hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}K_2)$$
$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3)$$

.../2

12. $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$$

13. $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19\ f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$