

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan  
Sidang 1995/95

Jun 1995

MAT 202 Pengantar Analisis

Masa : [3 jam]

---

Jawab kesemua **EMPAT (4)** soalan.

1. (a) Hubungan  $H$  ditakrifkan atas  $\mathbb{R}$  seperti yang berikut.

$$\text{Bagi } x, y \in \mathbb{R}, \\ x H y \Leftrightarrow xy \geq 7.$$

Tentukan sama ada  $H$  adalah refleksif, simetri dan transitif.  
Juga cari  $[2] H$ .

(35/100)

- (b) Buktikan bahawa tidak wujud sebarang nombor nisbah  $x$  supaya  $x^2 = 5$ .

(30/100)

- (c) Katakan  $x_1 = 1$  dan  $x_{n+1} = x_n + \frac{2}{x_n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

- (i) Tunjukkan bahawa  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  tak wujud.  
(ii) Tentukan sama ada jujukan  $\{x_n\}$  menokok atau menyusut.  
(iii) Adakah  $\{x_n\}$  terbatasi dari atas? Berikan alasan.  
(iv) Adakah  $\{x_n\}$  jujukan Cauchy? Berikan alasan.

(35/100)

...2/-

2. (a) Diberi  $A_n = \{ x \mid x = kn, k \in \mathbb{N} \}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Cari

(i)  $A_3 \cap A_4$

(ii)  $A_s \cup A_{st}$ ,  $s, t \in \mathbb{N}$

(iii)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

(20/100)

(b) Katakan  $X, Y, A$  dan  $B$  adalah subset dari  $\mathbb{R}$ .

(i) Jika  $X \subseteq Y$ , buktikan bahawa  $\overset{\circ}{X} \subseteq \overset{\circ}{Y}$ .

(ii) Buktikan bahawa  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq (\overset{\circ}{A \cup B})$ .

(iii) Adakah  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = (\overset{\circ}{A \cup B})$ ?

Buktikannya jika ia benar, sangkalkannya dengan memberi satu contoh jika ia tidak benar.

(iv) Apakah set terbuka yang terbesar yang terletak di dalam  $A$ ?  
[Tunjukkan alasan].

(50/100)

(c) Jika  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  selanjut secara seragam pada  $\mathbb{R}$  dan jujukan fungsi  $\{f_n\}$  ditakrifkan sebagai

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Buktikan bahawa jujukan fungsi  $\{f_n\}$  menumpu secara seragam pada  $\mathbb{R}$ .

(30/100)

...3/-

3. (a) Katakan  $A = (-8, 20] \cap \mathbb{Q}$ .
- (i) Cari  $\inf A$  dan  $\sup A$ .
  - (ii) Cari semua titik had bagi  $A$ .
  - (iii) Cari semua titik pedalaman bagi  $A$ .
  - (iv) Adakah  $A$  tertutup? Berikan alasan.
  - (v) Adakah  $A$  padat? Berikan alasan.
  - (vi) Adakah  $A$  terkait? Berikan alasan.
- (50/100)
- (b) Jika  $a$  suatu nombor yang tetap dan  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ , buktikan bahawa  $\inf S = a$ .
- (25/100)
- (c) Jika fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bersifat  $f(x) \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}$ , dan  $f$  bukan suatu fungsi malar, buktikan bahawa  $f$  tidak selanjar pada  $\mathbb{R}$ .
- (25/100)
4. Nyatakan sama ada pernyataan berikut benar atau salah. Jika pernyataan itu benar, buktikannya dan jika ia salah, berikan satu contoh lawan untuk menunjukkan ia salah.
- (a) Supremum suatu set  $S$ , jika wujud, adalah unik.
  - (b) Jika  $\{G_\alpha \mid \alpha \in I\}$  adalah suatu himpunan set-set terbuka dalam  $\mathbb{R}$ , maka  $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$  terbuka juga.
  - (c) Jika jujukan  $\{a_n\}$  mempunyai suatu subjujukan yang menumpu, maka  $\{a_n\}$  juga menumpu.
  - (d) Untuk sebarang set  $A$  yang tak terhingga, wujud suatu subset wajarnya  $B$  supaya  $B \sim A$ .
  - (e) Jika fungsi  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  adalah terbezakan pada  $A$ , maka  $f$  selanjar secara seragam pada  $A$ .

(100/100)

- 00000000 -