UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1997/98

Februari 1998

MAT 461 - Pentaabiran Statistik

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Andaikan X_1 dan X_2 sebagai suatu sampel rawak saiz 2 daripada suatu taburan dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Dapatkan f.k.k. bagi $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_2}$. Andaikan $Y_2 = X_2$.

(35/100)

(b) Andaikan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$ sebagai statistik tertib daripada suatu sampel rawak saiz 5 dengan f.k.k.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Tunjukkan bahawa Y_3 dan $Y_5 - Y_3$ adalah tak bersandar.

(35/100)

(c) Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ sebagai pembolehubah rawak tak bersandar dengan X_i bertaburan eksponen dengan parameter X_i, iaitu

$$f(x_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i x_i}, \quad x_i > 0, \; \lambda_i > 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Tunjukkan bahawa $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ mempunyai taburan eksponen dengan parameter $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

(30/100)

...2/-

2. (a) (i) Apakah yang dimaksudkan dengan penganggar saksama dan penganggar konsisten?

(ii) Jika $X_1, \ldots, X_n$ adalah suatu sampel rawak daripada taburan Bernoulli, iaitu

$$f(x;\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \quad , \quad x = 0,1 \quad , \quad 0 < \theta < 1 \; ,$$

adakah penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ ini suatu penganggar saksama dan konsisten bagi θ.

(iii) Dapatkan taburan bagi statistik $T = \sum X_i$.

(iv) Dapatkan pula suatu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi varians $T = \sum X_i$, iaitu $n\theta(1-\theta)$.

(70/100)

(b) Bagi teorem-teorem berikut, nyatakan dan bincangkan peranan masing-masing di dalam teori penganggaran.

(i) Teorem Rao-Blackwell.
(ii) Teorem Lehmann-Scheffé.
(iii) ketaksamaan Cramer-Rao.

(30/100)

3. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak daripada suatu taburan dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian berikut:

$$f(x{:}0) = \frac{1}{6\theta^4} x^3 e^{-x/\theta} \quad , \quad 0 < x < \infty \quad , \quad \theta > 0$$

(i) Dapatkan suatu statistik yang cukup dan lengkap bagi θ.

(ii) Dapatkan suatu penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

(iii) Adakah penganggar kebolehjadian maksimum ini juga suatu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi θ?

(iv) Dapatkan batas bawah Cramer-Rao penganggar saksama bagi θ ini.

(v) Tunjukkan bahawa penganggar kebolehjadian maksimum di bahagian (ii) adalah suatu penganggar cekap bagi θ.

(70/100)

...3/-

(b) Andaikan Y_4 sebagai suatu statistik tertib ke-4 bagi suatu sampel rawak dengan $n = 4$ daripada suatu taburan seragam $U(0,\theta)$. Andaikan $0 < C_1 < C_2 \leq 1$ dipilih supaya $P(C_1\theta < Y_4 < C_2\theta) = 0.95$. Tunjukkan bahawa $C_1 = \sqrt[4]{0.05}$ dan $C_2 = 1$ memenuhi syarat tersebut.

Dapatkan suatu selang keyakinan 95% bagi θ.

(30/100)

4. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak bersaiz n, daripada suatu taburan yang mempunyai purata θ dan varians σ^2, dengan σ positif dan terhingga. Andaikan $\overline{X}_n$ menandai purata sampel. Tunjukkan bahawa $\overline{X}_n$ adalah suatu penganggar konsisten bagi θ.

(20/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak daripada satu taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & , \quad \theta < x < \infty \text{ bagi } -\infty < \theta < \infty \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Dapatkan penganggar bagi θ dengan menggunakan kaedah kebolehjadian maksimum dan kaedah momen. Berdasarkan pada statistik Y_1, dapatkan suatu penganggar saksama bagi θ. $[Y_1 = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)]$

(40/100)

(c) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ menandakan suatu sampel rawak saiz 10 daripada suatu taburan Poisson dengan min θ, iaitu

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots, \quad \theta > 0$$

Tunjukkan bahawa rantau genting C yang ditakrifkan oleh $\sum_{i=1}^{10} x_i \geq 3$ ialah suatu rantau genting terbaik bagi menguji hipotesis $H_0: \theta = 0.1$ melawan $H_a: \theta = 0.5$. Dapatkan juga fungsi kuasa, $K(\theta)$, bagi ujian ini.

(40/100)

5. (a) Andaikan X suatu cerapan daripada taburan eksponen dengan ketumpatan kebarangkalian

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x}, & 0<x<\infty,\ \ \theta>0\\ 0, & \text{di tempat lain}\end{cases}$$

Andaikan kita berminat untuk menguji $H_0:\theta=0.05$ melawan $H_a:\theta=0.01$, dengan berdasarkan X.

(i) Tunjukkan bahawa ujian paling berkuasa menetapkan rantau genting seperti berikut:

$$C=\{x : x\geq c\}$$

(ii) Jika $c=40$, berikan kebarangkalian melakukan ralat jenis I dan kebarangkalian melakukan ralat jenis II.

(iii) Jika aras keertian ialah $\alpha=0.05$, apakah nilai c?

(iv) Adakah rantau genting seperti di dalam bahagian (i) merupakan suatu rantau genting paling berkuasa secara seragam untuk menguji $H_0:\theta=0.05$ melawan $H_a:\theta<0.05$?

(60/100)

(b) Andaikan $X_1,\ldots,X_n$ sebagai suatu sampel bersaiz n daripada taburan $N(\mu,100)$.

(i) Dapatkan rantau genting bagi ujian nisbah kebolehjadian untuk menguji $H_0:\mu=230$ melawan $H_a:\mu>230$.

(ii) Adakah ujian ini paling berkuasa secara seragam?

(iii) Jika suatu sampel rawak bersaiz 16 menghasilkan $\bar{x}=232.6$, adakah H_0 diterima pada aras keertian $\alpha=0.10$?

(40/100)

- oooOooo -