UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1997/98

April 1998

MAT 461 - Pentaabiran Statistik

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam LIMA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Andaikan X_1 dan X_2 menandai dua pembolehubah rawak yang tertabur secara secaman dan tak bersandar dengan taburan normal piawai, iaitu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad -\infty < x < \infty .$$

Tunjukkan bahawa

$$Y_1 = \frac{2X_1 - X_2}{\sqrt{5}} \quad \text{dan} \quad Y_2 = \frac{X_1 + 2X_2}{\sqrt{5}}$$

adalah tak bersandar.

(30/100)

(b) Jika X merupakan suatu pembolehubah rawak yang mempunyai fungsi penjana momen $m_X(t)$ bagi semua $-h < t < h,\ h > 0$, tunjukkan bahawa fungsi penjana momen bagi pembolehubah rawak $Y = aX + b$; a, b pemalar dan $a \neq 0$, diberikan oleh

$$m_Y(t) = e^{tb}\, m_X(at).$$

Gunakan keputusan ini untuk mencari taburan bagi

$$Y = 2\beta X \qquad \text{jika} \quad X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta).$$

(30/100)

...2/-

Diberikan f.k.k. bagi taburan gama (α, β):

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad 0 < x < \infty, \ \alpha > 0, \ \beta > 0$$

Fungsi penjana momen:

$$m(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}, \quad t < \beta$$

(c) Pertimbangkan sampel rawak saiz n daripada taburan yang mempunyai f.k.k.

$$f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta, \ \theta > 0$$

(i) Cari penganggar kaedah momen bagi θ.

(ii) Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

(iii) Cari statistik cukup bagi taburan ini.

(iv) Terbitkan suatu penganggar saksama bagi θ sebagai fungsi statistik cukup.

(40/100)

2. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak daripada taburan gama $(2, \theta)$ yang mempunyai f.k.k.

$$f(x; \theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}, \quad x > 0, \ \theta > 0 .$$

(i) Dapatkan satu penganggar kebolehjadian maksimum bagi $\frac{1}{\theta}$.

(ii) Tunjukkan bahawa taburan ini adalah ahli kelas eksponen dan dapatkan suatu statistik cukup dan lengkap.

(iii) Cari suatu PSVMS bagi $\frac{1}{\theta}$ dan tunjukkan bahawa ia adalah suatu penganggar cukup bagi $\frac{1}{\theta}$.

...3/-

(iv) Dapatkan pula suatu PSVMS bagi θ.

(60/100)

(b) Satu sampel rawak saiz 25 diambil daripada suatu taburan seragam dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2\theta}, \quad 0 < x < 2\theta, \quad \theta > 0$$
$$= 0 \quad \text{d.t.l.}$$

(i) Jika $Y_1, \ldots, Y_n$ menandakan statistik tertib bagi sampel ini, dapatkan f.k.k. bagi Y_n. Dapatkan pula f.k.k. bagi $\frac{Y_n}{2\theta}$.

(ii) Jika kita ingin dapatkan satu selang keyakinan bagi θ, tunjukkan bahawa $\frac{Y_n}{2\theta}$ adalah satu kuantiti pangsi.

(iii) Cari nilai c supaya $\left(\frac{Y_n}{2}, \frac{Y_n}{2c}\right)$ adalah satu selang keyakinan 95% bagi θ.

(40/100)

3. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai p.u.r. tak bersandar dan tertabur secara secaman menurut taburan Poisson dengan parameter θ, iaitu

$$f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, \quad \begin{array}{l} x = 0, 1, 2, \ldots \\ \theta > 0 \end{array}$$
$$= 0 \quad \text{d.t.l.}$$

Dapatkan suatu PSVMS untuk θ. Hitungkan variansnya dan bandingkannya dengan batas bawah Cramer-Rao bagi θ.

(40/100)

(b) Andaikan X sebagai suatu cerapan tunggal dari ketumpatan Bernoulli

$$f(x;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$
$$= 0 \quad \text{d.t.l.}$$

dengan $0 < \theta < 1$. Andaikan $T_1(X) = X$ dan $T_2(X) = \frac{1}{2}$.

...4/-

(i) Adakah $T_1(X)$ dan $T_2(X)$ tak saksama.

(ii) Bandingkan ralat min kuasadua untuk $T_1(X)$ dengan ralat min kuasadua untuk $T_2(X)$.

(iii) Dapatkan suatu penganggar bagi θ dengan menggunakan kaedah momen.

(60/100)

4. (a) Nyatakan Teorem Asasi Neyman-Pearson.

(10/100)

(b) Andaikan $X_1, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak daripada taburan $N(\mu, 36)$, iaitu

$$f(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)(36)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{36}}, \quad -\infty < x < \infty$$

(i) Dapatkan rantau genting terbaik untuk menguji hipotesis $H_0: \mu = 50$ melawan $H_a: \mu = 55$.

(ii) Jika $n = 16$, dapatkan rantau genting terbaik dengan saiz $\alpha = 0.0228$ bagi ujian di bahagian (i).

(30/100)

(c) Andaikan X adalah satu cerapan tunggal daripada taburan dengan f.k.k.

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0 \\ &= 0 \qquad\qquad \text{d.t.l.} \end{aligned}$$

(i) Bagi menguji $H_0: \theta = 1$ melawan $H_a: \theta > 1$, rantau genting yang digunakan ialah $c = \{x: x \geq \frac{1}{2}\}$.

Dapatkan suatu fungsi kuasa dan nilai ralat Jenis I bagi ujian ini.

(ii) Dapatkan satu ujian paling berkuasa saiz α bagi $H_0: \theta = 2$ melawan $H_a: \theta = 1$.

...5/-

(iii) Adakah terdapat satu ujian paling berkuasa secara seragam bagi $H_0: \theta = 2$ melawan $H_a: \theta < 2$?

(iv) Dapatkan satu ujian nisbah kebolehjadian bagi $H_0: \theta = 1$ melawan $H_a: \theta \neq 1$.

(60/100)

- oooOooo -