

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1998/99

Ogos/September 1998

MAT 421 - Persamaan Pembezaan III

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Cari persamaan lengkung kamiran dan lakarkan plot fasa untuk setiap sistem berikut:

(i) $x' = 4x - 5y$
 $y' = 5x - 4y$

(ii) $x' = y$
 $y' = x - x^3$

(60/100)

- (b) Cari titik-titik genting untuk sistem berikut. Dapatkan pelinearan terhadap setiap titik genting dan bincangkan kelakuan penyelesaian di sekeliling setiap titik genting itu.

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -\sin x - y\end{aligned}$$

(40/100)

2. (a) Jika $x(t)$, $y(t)$ ialah penyelesaian bagi sistem

$$x' = y(x^2 + y^2 - 1)$$

$$y' = (4 - x)(x^2 + y^2 - 1)$$

$$x(0) = 8, \quad y(0) = 0$$

dapatkan $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ dan $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

(30/100)

- (b) Tunjukkan bahawa penyelesaian sistem berikut:

$$x' = y, \quad x(0) = x_0$$

$$y' = -x + x^3, \quad y(0) = 0$$

adalah berkala jika $0 < x_0 < 1$.

(30/100)

...2/-

- (c) Dengan menggunakan fungsi Lyapunov $V = ax^2 + by^2$ tentukan kestabilan titik gending $(0, 0)$ untuk sistem

$$x' = -x + xy^2$$

$$y' = \alpha y + 2x^2 y$$

di mana α adalah pemalar.

(40/100)

3. (a) Cari jelmaan Fourier bagi fungsi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| < 3 \\ 0 & , |x| > 3 \end{cases}$$

(20/100)

- (b) Lakarkan graf jelmaan Fourier $F(\alpha)$ dari bahagian (a).

(10/100)

- (c) Dengan menggunakan rumus:

$$\mathfrak{F}\left[e^{-ax^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}, \quad a > 0$$

selesaikan masalah haba berikut:

$$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

dan tunjukkan bahawa penyelesaiannya boleh ditulis dalam bentuk

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}$$

(70/100)

...3/-

4. (a) Cari jelmaan Laplace bagi setiap fungsi berikut:

(i) $f(t) = \sin^2 t$

(ii) $g(t) = te^t \sin t$

(20/100)

(b) Dapatkan jelmaan Laplace songsang bagi setiap fungsi berikut:

(i) $F(s) = \frac{2s+3}{s(s+1)^2}$

(ii) $F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}$

(20/100)

(c) Selesaikan:

$$x'' + 16x = \begin{cases} \cos 4t & , 0 \leq t < \pi \\ 0 & , t \geq \pi \end{cases}$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

(40/100)

(d) Cari fungsi $x(t)$ yang memenuhi persamaan:

$$x(t) + \int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\tau = t$$

(20/100)

Jadual Jelmaan Laplace

$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, \dots$
$t^{\alpha-1}$	$\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}, \alpha > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\operatorname{erf} \sqrt{at}$	$\frac{\sqrt{a}}{s\sqrt{s+a}}$
$t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{2\sqrt{\pi}}{a} e^{-a\sqrt{s}}$