

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1997/98

Februari 1998

MAT 421 - Persamaan Pembezaan III

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA soalan di dalam TIGA halaman dan SATU halaman lampiran yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

- 1.(a) Cari persamaan lengkung kamiran dan lakarkan plot fasa untuk setiap sistem berikut:

(i)
$$\begin{aligned}x' &= 3x + y \\y' &= x + 3y\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}x' &= -xy \\y' &= xy - y\end{aligned}$$

(50/100)

- (b) Cari titik-titik genting untuk sistem berikut. Dapatkan pelinearan terhadap setiap titik genting dan bincangkan kelakuan penyelesaian di sekeliling setiap titik genting itu.

$$\begin{aligned}x' &= x - 1 \\y' &= x^2 - y^2\end{aligned}$$

(50/00)

- 2.(a) Jika $x(t)$, $y(t)$ ialah penyelesaian bagi sistem

$$\begin{aligned}x' &= (y - 3)(y - x) \\y' &= (4 - x)(y - x) \\x(0) &= 10, y(0) = 0\end{aligned}$$

dapatkan $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ dan $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

(30/100)

- (b) Dapatkan set nilai-nilai awal x_0 , y_0 supaya sistem berikut:

$$\begin{aligned}x' &= y, & x(0) &= x_0 \\y' &= -x - y^2, & y(0) &= y_0\end{aligned}$$

mempunyai penyelesaian yang berkala.

(40/100)

...2/-

- (c) Dapatkan nilai a dan b yang sesuai dalam fungsi $V = ax^2 + by^2$ supaya ia menjadi fungsi Lyapunov untuk sistem

$$\begin{aligned}x' &= -x^3 + 3y^2 \\ y' &= -y^3 - 2xy\end{aligned}$$

Tentukan kestabilan sistem ini.

(30/100)

- 3.(a) Cari jelmaan Fourier bagi fungsi

$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0$$

- (b) Cari jelmaan sinus Fourier bagi fungsi

$$g(x) = xe^{-ax^2}, \quad a > 0$$

- (c) Selesaikan:

$$\begin{aligned}u_t &= ku_{xx}, & x > 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x > 0 \\ u(0, t) &= f(t), & t > 0 \\ |u(x, t)| &< M, & x \geq 0, & t \geq 0\end{aligned}$$

(100/100)

- 4.(a) Cari jelmaan Laplace bagi setiap fungsi berikut:

(i) $f(t) = t^2 \cos t$

(ii) $f(t) = \sin^3 t$

(iii) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

(60/100)

- (b) Selesaikan:

$$\begin{aligned}x'' + x &= f(t) \\ x(0) &= 0, \quad x'(0) = 0\end{aligned}$$

di mana

$$f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t \leq 2 \\ t+2, & t > 2 \end{cases}$$

(40/100)

...3/-

5.(a) Cari jelmaan Laplace songsang bagi setiap fungsi berikut:

(i) $F(s) = \frac{2s+3}{s^2-2s-3}$

(ii) $F(s) = \frac{s^2}{(s-1)^4}$

(iii) $F(s) = \frac{1}{\sqrt{2s+3}}$

(60/100)

(b) Selesaikan:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x > 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= 0, & x > 0 \\ u_t(x, 0) &= 0, & x > 0 \\ u(0, t) &= f(t), & t > 0 \\ |u(x, t)| &< M, & x \geq 0, & t \geq 0 \end{aligned}$$

di mana $f(t)$ memenuhi syarat $f(0) = 0$

(40/100)

-ooo0ooo-

Jadual Jelmaan Laplace

$f(t)$	$F(s) = L\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, \dots$
$t^{\alpha-1}$	$\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}, \alpha > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\operatorname{erf} \sqrt{at}$	$\frac{\sqrt{a}}{s\sqrt{s+a}}$
$t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{2\sqrt{\pi}}{a} e^{-a\sqrt{s}}$