UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1998/99

Ogos/September 1998

MAT 363/MAT 461 - Pentaabiran Statistik

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA soalan di dalam EMPAT halaman dan SATU halaman lampiran yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ menandai sampel rawak daripada taburan $N(0, 1)$. Takrifkan

$$\overline{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \quad \text{dan} \quad \overline{X}_{n-k} = \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} X_i .$$

Gunakan keputusan taburan pensampelan untuk memperoleh taburan setiap statistik berikut:

(i) $\frac{1}{2}\left(\overline{X}_k + \overline{X}_{n-k}\right)$ (ii) $k\overline{X}_k^2 + (n-k)\overline{X}_{n-k}^2$

(iii) $\dfrac{(n-k)\sum_{i=1}^{k} X_i^2}{k\sum_{i=k+1}^{n} X_i^2}$ (iv) $\dfrac{k\overline{X}_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} X_i^2}}$

(40/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ menandai jujukan pemboleh ubah rawak yang mempunyai fungsi taburan F_n. Bagi setiap kes berikut, cari taburan penghad X_n, sekiranya wujud, dengan mengira $\underset{n\to\infty}{\text{had}}\ F_n(x)$.

(i) $X_n \sim N\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$

(ii) $X_n \sim N\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$

(20/100)

...2/-

(c) Pertimbangkan sampel rawak $X_1, X_2, \cdots, X_n$ daripada taburan $G(\alpha, \beta)$ yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} I_{(0,\infty)}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

(i) Cari taburan $\overline{X}_n$ dengan menggunakan teknik fungsi penjana momen.

(ii) Jika $M_n(t)$ ialah fungsi penjana momen bagi $\overline{X}_n$, tunjukkan bahawa $\overline{X}_n$ menumpu secara kebarangkalian kepada $\frac{\alpha}{\beta}$ dengan mencari $\underset{n\to\infty}{\text{had}}\, M_n(t)$.

(iii) Nyatakan taburan asimptot $\overline{X}_n$.

(iv) Takrifkan Z_n seperti berikut:

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}\left(\beta\overline{X}_n - \alpha\right)}{\sqrt{\alpha}}.$$

Jika F_n menandai fungsi taburan Z_n, cari

$$\underset{n\to\infty}{\text{had}}\, F_n(z).$$

(40/100)

2. (a) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak daripada taburan yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x;\, \theta) = \theta\,(1+x)^{-(1+\theta)}\, I_{(0,\infty)}(x), \quad \theta > 1.$$

(i) Cari penganggar kaedah momen bagi θ.

(ii) Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

(iii) Cari batas bawah Cramér-Rao bagi varians penganggar-penganggar saksama $(1/\theta)$.

(iv) Cari PSVMS bagi $(1/\theta)$ sekiranya ia wujud.
[*Petunjuk*: Dapatkan taburan $Y = \log(1+X)$]

(80/100)

(b) Berdasarkan sampel rawak saiz n daripada taburan seragam pada selang $(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$, tunjukkan bahawa penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ tidak unik dan berikan satu penganggar sedemikian.

(20/100)

...3/-

3. (a) Cari statistik cukup dan lengkap bagi setiap taburan berikut:

(i) $f(x;\ \theta) = (\theta + 1)x^{\theta}\ I_{(0,\ 1)}(x)\ ;\ \theta > -1$

(ii) $f(x;\ \theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-(x-\theta)^2/2\theta}\ I_{(-\infty,\ \infty)}(x)\ ;\ \theta > 0$

(iii) $f(x;\ \theta) = \dfrac{\log \theta}{\theta - 1} \theta^{x}\ I_{(0,\ 1)}(x)\ ;\ \theta > 1$

(30/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak daripada taburan dengan fungsi ketumpatan

$$f(x;\ \theta) = \theta e^{-\theta x}\ I_{(0,\ \infty)}(x)\ ;\ \theta > 0.$$

(i) Jika Y_1 ialah statistik tertib pertama bagi sampel rawak tersebut, cari $E[Y_1]$ dan kemudian terbitkan penganggar saksama bagi $(1/\theta)$ sebagai fungsi Y_1.

(ii) Cari satu lagi penganggar saksama bagi $(1/\theta)$ sebagai fungsi statistik cukup.

(iii) Cari PSVMS bagi θ dan tentukan sama ada ia penganggar cekap atau sebaliknya.

(70/100)

4. (a) Andaikan X suatu cerapan tunggal daripada taburan yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x;\ \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}\ I_{(0,\ \infty)}(x)\ ;\ \theta > 0$$

(i) Tunjukkan bahawa $\dfrac{2X}{\theta}$ ialah suatu kuantiti pangsian.

(ii) Selang rawak $(X,\ 2X)$ ialah suatu selang keyakinan bagi θ. Cari pekali keyakinan selang rawak tersebut.

(iii) Apakah jangkaan matematik panjang selang rawak di atas?

(40/100)

...4/-

(b) Pertimbangkan famili fungsi ketumpatan berikut:

$$f(x;\ \theta) = e^{-(x-\theta)}\ I_{(\theta,\ \infty)}(x)\ ;\ -\infty < \theta < \infty.$$

Bagi tujuan menganggar θ, sampel rawak $X_1, X_2, \cdots, X_n$ bersaiz n diambil daripada taburan tersebut.

(i) Jika $Y_1 = \min\ (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, tunjukkan Y_1 ialah penganggar konsisten bagi θ dengan mencari had fungsi taburan G_1 bagi Y_1 apabila $n \to \infty$.

(ii) Adalah diketahui bahawa $W = n(Y_1 - \theta) \sim$ eks (1). Terbitkan selang keyakinan $100\gamma\%$ bagi θ dengan menggunakan kuantiti pangsian W.

(iii) Bagi menguji $H_0 : \theta = 0$ lawan $H_1 : \theta > 0$, ujian berikut digunakan: tolak H_0 jika dan hanya jika $Y_1 > c,\ c > 0$. Kirakan fungsi kuasa $K(\theta)$ dalam sebutan n dan c.

(60/100)

5. (a) Nyatakan teorem Neyman-Pearson.

(20/100)

(b) Andaikan X cerapan tunggal daripada taburan yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x;\ \theta) = \theta x^{\theta-1}\ I_{(0,\ 1)}(x)\ ;\ \theta > 0.$$

(i) Bagi menguji $H_0 : \theta \leq 1$ lawan $H_1 : \theta > 1$, ujian berikut digunakan.
Tolak H_0 jika dan hanya jika $X \geq \frac{1}{2}$.
Cari fungsi kuasa dan saiz ujian tersebut.

(ii) Cari ujian paling berkuasa secara seragam (UPBS) bersaiz α bagi menguji

$$H_0 : \theta = 2 \text{ lawan } H_1 : \theta < 2.$$

(iii) Cari ujian nisbah-kebolehjadian teritlak bersaiz α bagi menguji

$$H_0 : \theta = 1 \text{ lawan } H_1 : \theta \neq 1$$

(80/100)

Lampiran 1

Taburan	Fungsi Ketumpatan	Min	Varians	Fungsi Penjana Momen
Seragam Diskrit	$f(x)=\frac{1}{N}\, I_{\{1,2,\cdots,N\}}(x)$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N}\, e^{jt}$
Bernoulli	$f(x)=p^x\, q^{1-x}\, I_{\{0,1\}}(x)$	p	pq	$q+pe^t$
Binomial	$f(x)=\binom{n}{x} p^x\, q^{n-x}\, I_{\{0,1,\cdots,n\}}(x)$	np	npq	$\left(q+pe^t\right)^n$
Geometri	$f(x)=p\,q^x I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1-qe^t},\ qe^t<1$
Poisson	$f(x)=e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!}\, I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$	λ	λ	$exp\{\lambda(e^t-1)\}$
Seragam	$f(x)=\frac{1}{b-a}\, I_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t},\ t\neq 0$
Normal	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\}\, I_{(-\infty,\infty)}(x)$	μ	σ^2	$exp\{\mu t+(\sigma t)^2/2\}$
Eksponen	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\, I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t},\ t<\lambda$
Gama	$f(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, e^{-\lambda x}\, x^{\alpha-1}\, I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha,\ t<\lambda$
Khi Kuasa Dua	$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{r/2}\frac{1}{\Gamma(r/2)}\, e^{-x/2}\, x^{(r/2)-1}\, I_{(0,\infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2},\ t<\frac{1}{2}$
Beta	$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, I_{(0,1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	

KSA - 4/6/98

- oooOooo -