UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2000/2001

April/Mei 2001

MAT 363 – Pentaabiran Statistik

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat dan SATU lampiran yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA EMPAT** soalan.

...2/-

1. (a) Biarkan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ menandai sampel rawak daripada taburan $N(\mu,\sigma^2)$. Cari taburan setiap pemboleh ubah rawak berikut:

   (i) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)}{\sigma^2}$ (ii) $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

   (iii) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$ (iv) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$

   (30/100)

   (b) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak saiz n daripada taburan $X^2(r)$ dan biarkan $\overline{X}_n$ menandai min sampel.

   (i) Cari taburan $\overline{X}_n$ dengan menggunakan teknik fungsi penjana momen.

   (ii) Cari taburan penghad $\overline{X}_n$ dengan mencari had fungsi penjana momen $\overline{X}_n$ apabila $n \to \infty$.

   (40/100)

   (c) Katakan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan eksponen yang berparameter θ. Jika $Y_1 = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, cari taburan penghad pemboleh ubah rawak nY_1.

   (30/100)

2. (a) Berasaskan sampel rawak saiz n daripada taburan $N(\theta_1, \theta_2)$ cari

   (i) penganggar kaedah momen

   (ii) penganggar kebolehjadian maksimum bagi parameter θ_1 dan θ_2.

   (30/100)

   (b) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak daripada taburan $P_0(\lambda)$ dan biarkan $\overline{X}$ dan S^2 masing-masingnya menandai min sampel dan varians sampel.

   (i) Tunjukkan bahawa

   $$T = a\overline{X} + (1-a)S^2, \quad 0 < a < 1,$$

   ialah penganggar saksama λ dan cari nilai a yang meminimumkan varians T. Biarkan $\sigma_{\overline{X}}$ dan σ_{s^2} masing-masingnya menandai sisihan piawai $\overline{X}$ dan S^2.

   (ii) Tentusahkan bahawa $\overline{X}$ ialah penganggar cekap λ.

   (35/100)

...3/-

(c) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak daripada taburan $N(\theta, 1)$, $-\infty < \theta < \infty$. Cari PSVMS bagi θ dan θ^2 dengan menggunakan teorem Lehman-Scheffé.

(35/100)

3. (a) Pertimbangkan sampel rawak daripada taburan $N(\theta, \theta)$. Terbitkan selang keyakinan 95% bagi θ berasaskan sampel rawak saiz $n = 25$ dengan menggunakan kuantiti pangsian

(i) $\dfrac{\overline{X} - \theta}{S/\sqrt{n}}$ (ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{25} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\theta}$

(40/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sampel rawak daripada taburan $P_0(\lambda)$.

(i) Menurut teorem had memusat

$$U_n = \frac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \xrightarrow{D} Z,$$

Z ialah pemboleh ubah rawak normal piawai. Tunjukkan bagaimana selang keyakinan hampiran 100γ peratus bagi λ dapat diperolehi.

(ii) Dengan menggunakan keputusan-keputusan tentang penumpuan dalam kebarangkalian dan penumpuan dalam taburan, tunjukkan bahawa $V_n = \sqrt{\overline{X}_n/\lambda} \xrightarrow{P} 1$ dan seterusnya

$$W_n = \frac{U_n}{V_n} = \frac{\overline{X} - \lambda}{\sqrt{\overline{X}/n}} \xrightarrow{D} Z,$$

Z pemboleh ubah rawak normal piawai. Terbitkan selang keyakinan hampiran 95% bagi λ dengan menggunakan W_n.

(iii) Antara U_n dan W_n, yang mana satu menghasilkan selang keyakinan yang lebih baik bagi n tetap? Beri justifikasi bagi jawapan anda.

(60/100)

4. (a) (i) Nyatakan lema Neyman-Pearson.

(ii) Biarkan $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ menandai sampel rawak daripada taburan eksponen yang berparameter θ. Cari ujian paling berkuasa saiz-α bagi menguji $H_0 : \theta = 2$ lawan $H_1 : \theta = 4$ sekiranya $\alpha = 0.05$.

...4/-

(iii) Sekiranya ruang parameter bagi taburan eksponen di atas ialah $\Theta = \{\theta : \theta \geq 2\}$, berikan ujian PBS bagi menguji $H_0 : \theta = 2$ lawan $H_1 : \theta > 2$.

(40/100)

(b) Andaikan X cerapan tunggal daripada taburan yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}\; I_{(0,1)}(x);\; \theta > 0$$

(i) Bagi menguji $H_0 : \theta \leq 1$ lawan $H_1 : \theta > 1$, ujian berikut digunakan:

Tolak H_0 jika dan hanya jika $X \geq \frac{1}{2}$. Cari fungsi kuasa dan saiz ujian tersebut.

(ii) Cari UPBS saiz α bagi menguji

$$H_0 : \theta = 2 \text{ lawan } H_1 : \theta < 2.$$

(iii) Cari ujian nisbah-kebolehjadian teritlak saiz α untuk menguji

$$H_0 : \theta = 1 \text{ lawan } \theta \neq 1.$$

(60/100)

- ooo O ooo -

Lampiran 1

Taburan	Fungsi Ketumpatan	Min	Varians	Fungsi Penjana Momen
Seragam Diskrit	$f(x) = \frac{1}{N} I_{\{1,2,\cdots,N\}}(x)$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} e^{jt}$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	p	pq	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\cdots,n\}}(x)$	np	npq	$(q+pe^t)^n$
Geometri	$f(x) = pq^x I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1-qe^t}, \quad qe^t < 1$
Poisson	$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$	λ	λ	$exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
Seragam	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}, \quad t \neq 0$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\} I_{(-\infty,\infty)}(x)$	μ	σ^2	$exp\{\mu t + (\sigma t)^2/2\}$
Eksponen	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$
Gama	$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha, \quad t < \lambda$
Khi Kuasa Dua	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r/2} \frac{1}{\Gamma(r/2)} e^{-x/2} x^{(r/2)-1} I_{(0,\infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}, \quad t < \frac{1}{2}$
Beta	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	

- oooOooo -