UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1994 / 95

Jun 1995

**MAT 361 - PENTAABIRAN STATISTIK**

Masa : 3 jam

---

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Katakan $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ ialah statistik tertib bagi n p.r. tak bersandar $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dengan f.k.k. sepunya :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad 0 < x < \infty \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain .} \end{cases}$$

Biarkan $Y_1 = X_{(1)} / X_{(2)}$, $Y_2 = X_{(2)} / X_{(3)}, \ldots,$

$Y_{n-1} = X_{(n-1)} / X_{(n)}$, dan $Y_n = X_{(n)}$.

(i) Tuliskan f.k.k. tercantum bagi $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$.

(ii) Dapatkan Jacobian bagi transformasi.

(iii) Demikian, dapatkan f.k.k. tercantum bagi $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.
Adakah $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ tak bersandar?

*(50/100)*

(b) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ p.r. tak bersandar yang bertaburan semacam dengan f.k.k. berikut :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad 0 < x < \infty \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain .} \end{cases}$$

Cari nilai hampiran bagi :

(i) $P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{200} \leq 210)$

(ii) $P\left(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_{100}^2 \leq 220\right)$

*(50/100)*

.../2

2. (a) Bincangkan peranan konsep-konsep berikut di dalam teori penganggaran :

    (i) statistik cukup

    (ii) kelengkapan bagi suatu famili taburan.

*(30/100)*

(b) Nyatakan Kriterium Pemfaktoran Neyman - Fisher.

*(10/100)*

(c) Katakan X mengambil nilai-nilai 0, 1 dan 2 dengan kebarangkalian $P_\theta(0)$, $P_\theta(1)$, dan $P_\theta(2)$ masing-masing. Bagi setiap daripada dua kes berikut, tentukan samada X lengkap atau tidak :

    (i) $P_\theta(0) = \theta,\ P_\theta(1) = 2\theta,\ P_\theta(2) = 1 - 3\theta,\ 0 < \theta < \frac{1}{3}$ .

    (ii) $P_\theta(0) = \theta,\ P_\theta(1) = \theta^2,\ P_\theta(2) = 1 - \theta - \theta^2,\ 0 < \theta < \frac{1}{2}$ .

*(30/100)*

(d) Katakan X adalah p.r. yang mempunyai f.k.k.

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(1 - e^{-\lambda})\,x!},\ x = 1, 2, \ldots, \lambda > 0.$$

    (i) Adakah X lengkap? Tunjukkan.

    (ii) Adakah wujudnya suatu penganggar saksama bagi $\lambda$ ?
    Jika ada, cari suatu penganggar saksama bagi $\lambda$ .

*(30/100)*

3. (a) Bincangkan peranan teorem-teorem berikut :

    (i) Teorem Rao - Blackwell ,

    (ii) Teorem Lehmann - Scheffe , dan

    (iii) Ketaksamaan Cramer - Rao ,

di dalam teori penganggaran. Berikan contoh-contoh.

*(40/100)*

.../3

(b) Katakan $X_1$ , $X_2$ , ..., $X_n$ adalah suatu sampel rawak daripada taburan Bernoulli dengan f.k.k.

$$f(x) = \begin{cases} 1-p \ , & x = 0 \\ p \ , & x = 1 \ , \ 0 < p < 1 \ . \end{cases}$$

Biarkan s suatu integer, $0 < s < n$. Cari suatu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam bagi $p^s$.

*(60/100)*

4. (a) Andaikan $X_1$ , $X_2$ , ..., $X_n$ ialah suatu sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|} \ , \quad -\infty < x < \infty \ , \quad -\infty < \theta < \infty$$

Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi $\theta$ .

*(40/100)*

(b) Katakan $X_1$ , $X_2$ , ..., $X_n$ sampel rawak daripada $N(\theta, 1)$. Cari batas bawah Cramer - Rao bagi varians penganggar saksama untuk (i) $\theta$ , dan (ii) $\theta^2$ .

*(30/100)*

(c) Andaikan X cerapan tunggal daripada taburan yang mempunyai f.k.k.

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} \ , & 0 < x < 1, \ \theta > 0 \\ 0 \ , & \text{di tempat lain .} \end{cases}$$

(i) Cari suatu kuantiti pangsi bagi $\theta$ .

(ii) Demikian, dapatkan suatu penganggar selang bagi $\theta$ dengan paras keyakinan $1 - \alpha$ .

*(30/100)*

5. (a) Nyatakan Lema Asasi Neyman - Pearson.

*(10/100)*

.../4

(b) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak saiz n daripada suatu populasi dengan f.k.k.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-x} \; , & x > 0 \; , \; \theta > 0 \\ 0 \; , & \text{di tempat lain} \end{cases} .$$

Cari ujian paling berkuasa secara seragam dengan saiz $\alpha$ untuk menguji $H_o : \theta \leq \theta_o$ lawan $H_1 : \theta > \theta_0$ .

*(40/100)*

(c) Katakan $X_{i1}$ , $X_{i2}$ , ..., $X_{in}$ suatu sampel rawak saiz n daripada suatu taburan normal dengan min $\mu_i$ dan varians $\sigma^2$ , i = 1, 2, ..., k .

Anggapkan $\mu_i$ , , i = 1, 2, ..., k dan $\sigma^2$ adalah anu. Anggapkan juga k sampel rawak tersebut adalah tak bersandar.

Tunjukkan bahawa ujian nisbah kebolehjadian untuk menguji $H_o : \mu_1 = \mu_2 = \ldots \mu_k$ lawan $H_1$ bukan semua $\mu_i$ adalah sama, boleh di asaskan pada p.r.

$$F = \frac{n \sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 / (k - 1)}{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 / (N - k)} ,$$

di mana $N = nk$ , $\bar{x} = \sum_i \sum_j x_{ij} / N$ dan

$\bar{x}_i = \sum_j x_{ij} / n$ .

*(50/100)*

- ooo000ooo -

**LAMPIRAN - I**

| Taburan | Fungsi Ketumpatan $f$ | Min $\mu = E[X]$ | Varians $\sigma^2 = E\left[(x-\mu)^2\right]$ | Fungsi penjana Momen |
|---|---|---|---|---|
| Seragam Diskrit | $f(x) = \frac{1}{N} I_{\{1,2,\ldots,N\}^{(x)}}$ | $\frac{N+1}{2}$ | $\frac{N^2-1}{12}$ | $\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} e^{jt}$ |
| Bernoulli | $f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}^{(x)}}$ | $p$ | $pq$ | $q + pe^t$ |
| Binomial | $f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\ldots,n\}^{(x)}}$ | $np$ | $npq$ | $(q+pe^t)^n$ |
| Geometri | $f(x) = pq^x I_{\{0,1,\ldots\}^{(x)}}$ | $\frac{q}{p}$ | $\frac{q}{p^2}$ | $\frac{p}{1-qe^t}$ |
| Poisson | $f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\ldots\}^{(x)}}$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $\exp\{\lambda(e^t-1)\}$ |
| Seragam | $f(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)^{(x)}}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\frac{e^{bt}-e^{at}}{(h-a)^t}$ |
| Normal | $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right\} I_{(-\infty,\infty)^{(x)}}$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $\exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$ |
| Eksponen | $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)^{(x)}}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\frac{\lambda}{\lambda-t}, \ t<\lambda$ |
| Gamma | $f(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1} I_{(0,\infty)^{(x)}}$ | $\frac{n}{\lambda}$ | $\frac{n}{\lambda^2}$ | $\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n, \ t<\lambda$ |
| Khi kuasa dua | $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r/2} \frac{1}{\Gamma(r/2)} e^{-x/2} x^{(r/2)-1} I_{(0,\infty)^{(x)}}$ | $r$ | $2r$ | $\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}, \ t<\frac{1}{2}$ |
| Beta | $f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)^{(x)}}$ | $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ | $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$ | - |

**LAMPIRAN-2**

Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel rawak daripada taburan *F(x)* dengan f.k.k. f(x). Andaikan p.r. $X_i$ adalah selanjar.

Biarkan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ialah statistik tertib bagi sampel ini, iaitu, $Y_i = X_{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Maka:

(i) f.k.k. tercantum bagi $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ialah $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n!\, f(y_1), f(y_2) \ldots f(y_n)$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ .

(ii) f.k.k. bagi $Y_k$ ialah $g_k(y_k) = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left[F(y_k)\right]^{k-1} \left[1 - F(y_k)\right]^{n-k} f(y_k)$ .

(iii) f.k.k. tercantum bagi $Y_i$ dan $Y_j$ ; $i < j$, ialah

$$g_{ij}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \left[F(y_i)\right]^{i-1} \left[F(y_j) - F(y_i)\right]^{j-i-1} \left[1 - F(y_j)\right]^{n-j} f(y_i) f(y_j),\ y_i < y_j .$$