UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

PEPERIKSAAN SEMESTER KEDUA
SIDANG AKADEMIK 1993/94

APRIL

MAT 361 - Pentaabiran Statistik

Masa: 3 Jam

Jawab **SEMUA** soalan.

Semua soalan **MESTI** dijawab dalam Bahasa Malaysia. **MULAKAN** setiap soalan pada halaman yang baru.

1. (a) Katakan X_1, X_2, X_3, dan X_4 adalah pembolehubah-pembolehubah rawak tak bersandar dengan masing-masing X_i mempunyai f.k.k.

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha_i)} x^{\alpha_i - 1} e^{-x}, & 0 < x < \infty, \alpha_i > 0 \\ 0 & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Biarkan $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}$,

$$Y_2 = \frac{X_2}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4},$$

$$Y_3 = \frac{X_3}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4},$$

dan $Y_4 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Cari f.k.k. tercantum bagi Y_1, Y_2, Y_3, Y_4.

Adakah Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 saling tak bersandar?

(50/100)

(b) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel rawak daripada taburan eksponen dengan parameter $\lambda > 0$, iaitu, f.k.k. bagi setiap X_i ialah

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , 0 < x < \infty \\ 0 & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Biarkan $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

(i) Dapatkan f.k.k. bagi Y_n .

(ii) Cari taburan penghad bagi pembolehubah rawak $Z_n = \frac{Y_n}{n}$.

(50/100)

2. (a) Berikan takrif-takrif bagi sebutan-sebutan berikut:-

(i) Statistik cukup

(ii) Kelengkapan bagi suatu famili taburan

(20/100)

(b) Nyatakan Kriterium Pemfaktoran Neyman-Fisher

(10/100)

(c) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel rawak daripada taburan Poisson dengan parameter $\lambda > 0$, iaitu, f.k.k. bagi X_i ialah

$$f(x) = P(X_i = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} , x = 0, 1, 2, \ldots$$

Adakah wujudnya suatu penganggar saksama bagi $1/\lambda$? Terangkan.

(30/100)

(d) Katakan X_1 , X_2 , ..., X_n ialah suatu sampel rawak daripada taburan $N(0, \sigma^2)$.

(i) Dapatkan suatu statistik yang cukup dan lengkap bagi σ^2

(ii) Dari sini, atau dengan menggunakan cara lain, dapatkan suatu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam bagi σ^2

(40/100)

3. (a) Nyatakan:

(i) Teorem Rao-Blackwell

(ii) Teorem Lehmann-Scheffé

Apakah peranan teorem-teorem di atas di dalam teori penganggaran? Berikan contoh-contoh.

(40/100)

(b) Katakan X, Y dan Z adalah pembolehubah rawak tak bersandar yang mempunyai taburan Poisson dengan min $E(X) = \lambda$, $E(Y) = 2\lambda$ dan $E(Z) = 3\lambda$, masing-masing, di mana $\lambda > 0$.

(i) Dapatkan f.k.k. bagi $X + Y + Z$.

(ii) Dapatkan f.k.k. bersyarat bagi Y diberikan $X + Y + Z$.

(iii) Tunjukkan bahawa $X + Y + Z$ ialah suatu statistik cukup dan lengkap bagi λ.

(iv) Katakan $W = \begin{cases} 0 \text{ jika } Y \neq 0 \\ 1 \text{ jika } Y = 0 \end{cases}$

Tunjukkan bahawa W ialah saksama bagi $e^{-2\lambda}$. Demikian, dapatkan penganggar saksama bervarians minimum secara seragam bagi $e^{-2\lambda}$.

(60/100)

4. (a) Nyatakan:

(i) Ketaksamaan Cramer-Rao

(ii) Lema Asasi Neyman-Pearson

(20/100)

(b) Katakan X_1 , X_2 , ..., X_n ialah sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\alpha) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & , x > 0 , \alpha > 0 \\ 0 & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Cari batas bawah Cramer-Rao bagi varians penganggar saksama untuk

(i) α , dan (ii) $1/\alpha$.

(40/100)

(c) Katakan X_1 , X_2 , ..., X_n ialah sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta(1+x)^{-(1+\theta)} & , 0 < x < \infty , \theta > 0 \\ 0 & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi $1/\theta$.

(20/100)

(d) Terangkan sebutan-sebutan berikut:

(i) Ralat jenis I

(ii) Ralat jenis II

(iii) Famili taburan dengan nisbah kebolehjadian ekanada

(iv) Ujian nisbah kebolehjadian

(20/100)

5. (a) Katakan X_1 dan X_2 ialah sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (1+\theta)x^{\theta} & , 0 < x < 1 , \theta \geq 0 \\ 0 & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Untuk menguji $H_o : \theta = 2$ lawan $H_1 : \theta = 1$, ujian berikut diguna:

Tolak H_o jika $X_1 X_2 \leq \frac{3}{4}$

Cari saiz dan kuasa bagi ujian ini.

(40/100)

(b) Katakan $X_1 , X_2 , \ldots, X_n$ sampel rawak daripada populasi dengan f.k.k.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} & , x > 0 , \alpha > 0 \\ 0 & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Cari suatu ujian saiz α yang paling berkuasa secara seragam bagi menguji $H_o : \alpha \leq \alpha_0$ lawan $H_1 : \alpha > \alpha_o$.

(30/100)

(c) Katakan $X_1 , X_2 , \ldots, X_n$ sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & , x > 0 , \beta > 0 \\ 0 & \text{di tempat lain.} \end{cases}$$

Cari ujian nisbah kebolehjadian untuk menguji $H_o : \beta \leq \beta_o$ lawan $H_1 : \beta > \beta_o$.

(30/100)

Taburan	*Fungsi Ketumpatan* f	*Min* $\mu = E[X]$	*Varians* $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$	*Fungsi penjana Momen*
Seragam Diskrit	$f(x) = \frac{1}{N} I_{\{1, 2, \ldots, N\}}(x)$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} e^{jt}$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0, 1\}}(x)$	p	pq	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0, 1, \ldots, n\}}(x)$	np	npq	$(q + pe^t)^n$
Geometri	$f(x) = p q^x I_{\{0, 1, \ldots\}}(x)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1-qe^t}$
Poisson	$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} I_{\{0, 1, \ldots\}}(x)$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
Seragam	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a, b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\} I_{(-\infty, \infty)}(x)$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}$
Eksponen	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0, \infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$
Gamma	$f(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1} I_{(0, \infty)}(x)$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n, \quad t < \lambda$
Khi kuasa dua	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r/2} \frac{1}{\Gamma(r/2)} e^{-x/2} x^{(r/2)-1} I_{(0, \infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}, \quad t < \frac{1}{2}$
Beta	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0, 1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	—