UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1997/98

April 1998

MAT 302/MAT 202 - Pengantar Analisis

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam TIGA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) (i) A, B, C adalah set. Jika $A \sim B$ dan $B \sim C$, tunjukkan bahawa $A \sim C$.

(ii) Set S dan T bersifat $S \sim T$ dan T terbilangkan. Buktikan bahawa S terbilangkan juga.

(iii) Jika set $P \sim R$, adakah P terbilangkan? Berikan alasan.

(b) Jujukan $\{x_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$x_n = \frac{e^{n+1}}{(n+2)\,!} \quad , \quad n \in N.$$

(i) Tunjukkan bahawa $\{x_n\}$ menyusut.

(ii) Cari $\underset{n \to \infty}{\text{had}}\ x_n$ jika wujud.

(iii) Adakah $\{x_n\}$ terbatas? Berikan alasan.

(c) Jika $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset R$, jujukan $\{x_n\}$ terbatas dan $\{y_n\}$ adalah jujukan Cauchy, buktikan bahawa jujukan $\{x_n\ y_n\}$ mempunyai suatu subjujukan yang menumpu.

(100 markah)

...2/-

2. (a) Andaikan $S=(-\infty,\ -1)\cup\left\{\frac{1}{2^n}\ :\ n\in N\right\}$.

   (i) Cari inf S dan sup S, jika wujud.

   (ii) Cari S°.

   (iii) Cari S'.

   (iv) Adakah set S tertutup? Berikan alasan.

   (b) Diberi $f(x)=x^4$, $x\in[1,\ 2]$ dan petak

$$P_n=\left\{1,\ 1\frac{1}{n},\ 1\frac{2}{n},\ 1\frac{3}{n},\ \cdots,\ 2\right\}\ ,\ n\in N.$$

   (i) Cari $A(P_n;f)-B(P_n;f)$

   (ii) Dengan ini, tunjukkan bahawa f terkamirkan pada [1, 2].

   (c) Fungsi f selanjar pada selang $[a,\ b]$, tebezakan pada $(a,\ b)$ dan $f(a)=0=f(b)$. Buktikan bahawa wujud $c\in(a,\ b)$ supaya $f'(c)+kf(c)=0$, di mana k suatu pemalar.

   [*Petunjuk*: Bentukkan suatu fungsi baru dengan menggunaan f].

(100 markah)

3. (a) Jika $p,\ q\in R$ dengan $p<q$ dan $A_n=\left[1-\frac{1}{n^2}\ ,\ q+n-\frac{1}{n}\right]$, $n\in N$, cari $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ dan $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$.

   (b) Andaikan $a,\ b,\ \lambda\in R$, $b\neq 0$ dan $\lambda>0$. Buktikan bahawa wujud $r\in Q$ dengan $\frac{1}{a^2+b^2}<\frac{r}{\lambda}<\frac{1}{b^2}$.

...3/-

(c) (i) Buktikan siri fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\,x}{n^2+5}$ menumpu secara seragam pada R..

(ii) Cari $\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\,x}{n^2+5}\,dx$.

(d) Fungsi $f : R \to R$ bukan fungsi malar dan bersifat $f(x) \in Z$, $\forall\ x \in R$. Buktikan bahawa f tak selanjar pada R..

(*100 markah*)

4. Nyatakan sama ada setiap pernyataan berikut benar atau salah. Jika ia benar buktikannya dan jika ia salah berikan satu contoh untuk menunjukkan ia salah.

(a) Jika jujukan $\{a_n\} \subset R$ menumpu, maka $\{a_n\}$ adalah jujukan Cauchy.

(b) Andaikan $S, T \subset R$ dan terbatas. Jika $S \subset T$, maka $\sup S \leq \sup T$.

(c) Jujukan fungsi $\{f_n\}$ menumpu ke fungsi f pada $A \subset R$. Jika setiap f_n selanjar pada A, maka f juga selanjar pada A.

(d) Bagi $A, B \subset R$,

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}\,,$$

di mana $\overline{S} = S \cup S'$ bagi sebarang $S \subset R$.

(*100 markah*)

- oooOooo -