UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1997/98

Februari 1998

MAT 302 / MAT 202 - Pengantar Analisis

Masa: [3 jam]

Jawab kesemua **EMPAT (4)** soalan.

1. (a) (i) Buktikan bagi $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$,

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

(ii) Bilakah ketaksamaan dalam bahagian (i) menjadi kesamaan?

(iii) Dengan menggunakan keputusan bahagian (i), buktikan ketaksamaan Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^{2}(a_i + b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{2} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{2} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(iv) Jika d ditakrifkan atas $\mathbb{R}^2$ sebagai

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

tunjukkan bahawa

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^2.$$

(b) (i) Jika $A \subset \mathbb{R}$ dan $a \in A'$, tunjukkan bahawa wujud suatu jujukan $\{a_n\} \subset A$ dengan $a_n \to a$.

.../2-

(ii) Diberi fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selanjar pada $\mathbb{R}$ dan

$$f(x) = 302, \quad \forall\, x \in Q.$$

Buktikan bahawa

$$f(x) = 302, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(100/100)

2. (a) Jujukan $\{x_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$x_1 = 1$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{x_n}, \quad n \geq 1.$$

(i) Tunjukkan bahawa $x_n \geq 1, \; \forall\, n = 1, 2, 3, \cdots$.

(ii) Tentukan sama ada $\{x_n\}$ menokok atau menyusut.

(iii) Buktikan bahawa $\{x_n\}$ mencapah.

(iv) Adakah $\{x_n\}$ terbatas? Berikan alasan.

(b) Fungsi $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$ ditakrifkan sebagai

$$g(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 2],$$

dan $P_n = \left\{ 1,\; 1\frac{1}{n},\; 1\frac{2}{n},\; 1\frac{3}{n}, \cdots, 2 \right\}$ ialah petak pada selang $[1, 2]$.

(i) Cari $A(P_n; g) - B(P_n; g)$.

(ii) Dengan menggunakan bahagian (i), tunjukkan bahawa g terkamirkan pada $[1, 2]$.

...3/-

(c) Andaikan fungsi $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ selanjar pada $[a, b]$ dan

$$\int_a^b h^2(x)\, dx = \int_a^b h(x)\, dx.$$

Buktikan bahawa wujud $c \in (a, b)$ dengan $h(c) = 0$ atau $h(c) = 1$.

(100/100)

3. (a) (i) Jika fungsi f terbezakan dan f' terbatas pada suatu selang S, buktikan dengan menggunakan teorem nilai min bahawa f selanjar secara seragam pada S.

(ii) Dengan menggunakan bahagian (i), tunjukkan fungsi g yang ditakrifkan sebagai

$$g(x) = \cos \frac{1}{x}, \quad x \in [1, \infty)$$

adalah selanjar secara seragam pada $[1, \infty)$.

(b) (i) Diberi $S = [1, \infty) \cap Q$.
Cari S^0 dan S'.
Cari inf S dan sup S, jika wujud.
Adakah S set terbuka? Berikan alasan.

(ii) Jika c adalah suatu nombor nyata yang tetap dan $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < c \}$, buktikan bahawa $\sup A = c$.

(iii) Nyatakan sama ada pernyataan yang berikut benar atau salah. Jika ia benar buktikannya dan jika ia salah berikan satu contoh untuk menunjukkan ia salah.

Jika $B \subset \mathbb{R}$ adalah terbatas,
maka $B' \neq \phi$.

(100/100)

.../4-

4. (a) (i) Jika suatu subset yang terbilangkan dikeluarkan daripada suatu set yang tak terbilangkan, buktikan bahawa set yang tertinggal adalah masih tak terbilangkan.

(ii) Andaikan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungi yang satu dengan satu. Jika $D \subset \mathbb{R}$, tentukan sama ada $f^{-1}(D \cap Q)$ terbilangkan atau tak terbilangkan. Berikan alasan.

(b) (i) Buktikan siri fungsi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{e^n}$ menumpu secara seragam pada $\mathbb{R}$.

(ii) Tunjukkan $\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n x}{e^n} dx = \frac{2e}{e^{2} - 1}$.

(c) (i) Fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ selanjar secara seragam pada A dan $A \subset \mathbb{R}$. Jika $\{a_n\} \subset A$ adalah suatu jujukan Cauchy, buktikan bahawa $\{f(a_n)\}$ adalah juga suatu jujukan Cauchy.

(ii) Jika sifat f selanjar secara seragam pada A digugurkan dan digantikan dengan f selanjar pada A, tunjukkan pernyataan dalam bahagian (i) tidak benar lagi dengan memberikan suatu contoh lawan.

(100/100)

- oooOooo -