UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang Akademik 1993/94

Oktober/November 1993

MAT 301 - Analisis Kompleks

Masa : [3 jam]

Jawab **kesemua** lima (5) soalan.

1. (a) Buktikan bahawa

$$\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha+i\sin\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}\, e^{i[\alpha-(\pi/2)]}$$

(b) Dengan mempertimbangkan punca-punca untuk

$z^{2n+1}+1=0$ (n integer)

tunjukkan bahawa

$$\sum_{k=-n}^{n}\cos\left(\frac{2k+1}{2n+1}\right)\pi = 0.$$

(c) Tunjukkan bahawa

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \bar{a} \\ 1 & b & \bar{b} \\ 1 & c & \bar{c} \end{vmatrix}$$

adalah suatu nombor khayalan tulen. a dan b adalah nombor-nombor kompleks.

(100/100)

2. (a) Jika f(z) analisis dalam suatu domain D, pada titik-titik (dalam D) manakah fungsi

$g(z) = \overline{f(z)}$ akan menjadi analisis?

(b) Buktikan bahawa fungsi

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3+i(x^3-y^3)}{x^2+y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$$

selanjar pada titik $z = 0$, tetapi $f'(0)$ tidak wujud.

(c) Set $\{z \in \mathbb{C}: 0 < \text{Ny}(z) < 1 \text{ dan juga } \text{Kh}(z) = 0\}$ tidak terbuka. Mengapa?

(100/100)

3. (a) Katakan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Andaikan

$$\lim_{\Delta z \to 0} \text{Ny}\left[\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\right]$$

wujud. Tunjukkan bahawa pada titik z, $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ wujud dan sama.

(b) Tunjukkan bahawa

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4}, & z \neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$$

memenuhi persamaan Cauchy-Riemann pada $z = 0$ tetapi tidak terbeza di situ.

(c) Pertimbangkan penjelmaan

$$w = f(z) = i\,\frac{1-z}{1+z}$$

Tunjukkan bahawa f memetakan bulatan unit $|z| = 1$ ke seluruh paksi nyata pada satah-w, pendalamannya , $|z| < 1$, ke seluruh setengah atas satah-w dan peluarannya, $|z| > 1$, ke seluruh setengah bawah satah-w.

(100/100)

4. (a) Nilaikan kamiran-kamiran berikut, dengan setiap lengkungan γ yang dinyatakan berada dalam arah lawan arah jam.

(i) $\displaystyle\int_\gamma e^z dz$, γ sebahagian daripada bulatan $|z| = 1$ yang menghubungkan 1 dengan i

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^3(z-2)^2} dz$, $\gamma: |z-3|=2$

(iii) $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2(z^2-2)} dz, \quad \gamma: |z|=3$

(b) Jika γ adalah setengah atas bulatan $|z| = 1$, tunjukkan bahawa

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+2} \right| \leq \pi$$

(c) Biar $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \; a_n z^n$, $a_n \neq 0$ satu polinomial berdarjah n ($n \geq 1$). Tunjukkan bahawa wujud sekurang-kurangnya satu titik x_0 supaya $P(z_0) = 0$.

(100/100)

5. (a) Kembangkan fungsi $f(z) = \frac{1}{3-z}$ secara siri Taylor dalam kuasa (z-2i) dan dapatkan bulatan penumpuan. Pada rantau manakah siri ini boleh dikamirkan sebutan-demi-sebutan? Beri satu justifikasi kepada jawapan anda.

(b) Dapatkan titik-titik singular bagi fungsi $f(z) = \frac{1}{z^2(e^z-1)}$ dan kelaskan setiap titik ini sebagai tersingkirkan, penting atau kutub peringkat tertentu. Dapatkan reja pada setiap kutub.

(c) Biar f satu fungsi seluruh supaya $|f(z)| \leq A|z|$ untuk semua z, dengan A satu nombor positif tetap. Tunjukkan bahawa $f(z) = a_1 z$, dengan a_1 satu pemalar kompleks. Nyatakan dengan jelas teorem-teorem yang digunakan.

(100/100)

ooo0ooo