

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
PEPERIKSAAN SEMESTER KEDUA
SIDANG AKADEMIK 1993/94

APRIL 1994

MAT 261 - Teori Kebarangkalian I

Masa : 3 Jam

Jawab SEMUA soalan.

1 (a) Andaikan p.u.r. X mempunyai f.k.k.

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0$$

- (i) Dapatkan fungsi taburan bagi X .
- (ii) Jika $Y = 1 - F(X)$, dapatkan f.k.k. bagi Y .

(30 Markah)

(b) Fungsi taburan bagi p.u.r. X diberikan seperti berikut:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 & x < 0 \\ &= \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ &= \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ &= \frac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ &= 1 & 3 \leq x \end{aligned}$$

- (i) Plotkan graf $F(x)$.
- (ii) Hitung $P(X < 3)$, $P(X = 1)$, $P(X > \frac{1}{2})$ dan $P(2 < X \leq 4)$.

(40 Markah)

- (c) Pertimbangan fungsi taburan berikut:

$$F(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})}, \quad -\infty < x < \infty$$

Dapatkan f.k.k. bagi taburan ini dan tunjukkan bahawa taburan ini bersimetri pada garis yang melalui $x = 0$.

(30 Markah)

- 2 (a) Andaikan X dan Y sebagai dua p.u.r. diskrit dengan $P(X = x, Y = y)$ bagi $x = 1, 2$, dan $y = 1, 2$, seperti berikut:

$\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}$	1	2
1	$1/8$	$1/4$
2	$1/8$	$1/2$

- Dapatkan f.k.k. bersyarat bagi X diberikan $Y = y, y = 1, 2$.
- Adakah X dan Y tak bersandar?
- Hitung $P(XY \leq 3)$ dan $P(X + Y > 2)$

(50 Markah)

- (b) X dan Y merupakan 2 p.u.r. selang dengan f.k.k. tercantum seperti berikut:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right), & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{d.t.l.} \end{cases}$$

- Tunjukkan bahawa fungsi ini sebenarnya ialah suatu f.k.k.
- Dapatkan fungsi taburan sut bagi X
- Dapatkan $P(X > Y)$

(50 Markah)

- 3 (a) Andaikan p.u.r. X dan Y mempunyai f.k.k. tercantum:

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & , x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{d.t.l.} \end{cases}$$

Adakah X dan Y tak bersandar? Dengan menggunakan keputusan ini, dapatkan f.k.k. bersyarat bagi X diberikan $Y = y$.

(30 Markah)

- (b) X_1 dan X_2 merupakan p.u.r. tak bersandar jenis diskrit dengan f.k.k. tercantum $f_1(x_1)$ $f_2(x_2)$, $(x_1, x_2) \in A$. Andaikan $y_1 = u_1(x_1)$ dan $y_2 = u_2(x_2)$ menandakan suatu transformasi satu-ke-satu daripada set A ke set B . Tunjukkan bahawa $Y_1 = u_1(X_1)$ dan $Y_2 = u_2(X_2)$ adalah tak bersandar.

(20 Markah)

- (c) Andaikan $X_1, X_2, \dots, X_n$ sebagai n p.u.r. Normal tak bersandar, masing-masing dengan min $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ dan varians $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$. Tunjukkan bahawa fungsi linear

$$Y = \sum_{i=1}^n c_i X_i$$

tertabur secara $N\left(\sum_{i=1}^n c_i \mu_i, \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_i^2\right)$, dengan $c_1, c_2, \dots, c_n$ merupakan pemalar.

Gunakan keputusan ini untuk menghitung

$$P(X_1 < X_2) = P(X_2 - X_1 > 0)$$

dengan X_1 dan X_2 merupakan p.u.r. tak bersandar, masing-masing mempunyai taburan $N(4, 9)$ dan $N(7, 16)$.

- 4 (a) Andaikan X mempunyai taburan seragam bagi selang $(0, 10)$, iaitu

$$f(x) = \frac{1}{10}, \quad 0 < x < 10$$

$$= 0 \quad \text{d.t.l.}$$

- (i) Dapat min dan varians bagi X
- (ii) Dapatkan batas atas bagi $P(|X - 5| > 4)$
- (iii) Bandingkan batas atas ini dengan kebarangkalian tepat $P(|X - 5| > 4)$

(40 Markah)

- (b) Andaikan X_1 dan X_2 sebagai dua p.u.r. tak bersandar yang tertabur secara normal piawai. Jika $Y_1 = X_1 + X_2$ dan $Y_2 = X_1 - X_2$, dapatkan f.k.k. tercantum bagi Y_1 dan Y_2

(30 Markah)

- (c) Andaikan X dan Y sebagai dua p.u.r., masing-masing dengan min μ_1, μ_2 , varians σ_1^2, σ_2^2 dan pekali korelasi ρ . Tunjukkan bahawa pekali korelasi bagi $W = aX + b$, $a > 0$ dan $Z = cY + d$, $c > 0$, ialah ρ .

(30 Markah)

- 5 (a) Jika p.u.r. X mempunyai f.k.k.

$$f(x) = \frac{1}{4}, \quad -2 < x < 2$$

$$= 0 \quad \text{d.t.l.}$$

dapatkan f.k.k. bagi $Y = X^2$

(30 Markah)

(b) Andaikan X sebagai satu p.u.r. yang tertabur secara Poisson dengan min μ .

(i) Tunjukkan bahawa fungsi penjana momen bagi X ialah

$$m(t) = e^{\mu(e^t - 1)}$$

(ii) Andaikan X_1 dan X_2 sebagai dua p.u.r. tak bersandar dan tertabur secara Poisson, masing-masing dengan min μ_1 dan μ_2 . Dengan menggunakan teknik fungsi penjana momen, dapatkan taburan bagi $Y = X_1 + X_2$.

(iii) Tunjukkan bahawa f.k.k. bersyarat bagi X_1 diberikan $X_1 + X_2 = n$ merupakan satu f.k.k. bagi taburan binomial dengan parameter n

$$\text{dan } p = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Dengan itu, dapatkan jangkaan bersyarat bagi X_1 diberikan $X_1 + X_2 = n$

(70 Markah)

Taburan Normal					
$P(X \leq x) = N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw$ $[N(-x) = 1 - N(x)]$					
x	N(x)	x	N(x)	x	N(x)
0.00	0.500	1.10	0.864	2.05	0.980
0.05	0.520	1.15	0.875	2.10	0.982
0.10	0.540	1.20	0.885	2.15	0.984
0.15	0.560	1.25	0.894	2.20	0.986
0.20	0.579	1.282	0.900	2.25	0.988
0.25	0.599	1.30	0.903	2.30	0.989
0.30	0.618	1.35	0.911	2.326	0.990
0.35	0.637	1.40	0.919	2.35	0.991
0.40	0.655	1.45	0.926	2.40	0.992
0.45	0.674	1.50	0.933	2.45	0.993
0.50	0.691	1.55	0.939	2.50	0.994
0.55	0.709	1.60	0.945	2.55	0.995
0.60	0.726	1.645	0.950	2.576	0.995
0.65	0.742	1.65	0.951	2.60	0.995
0.70	0.758	1.70	0.955	2.65	0.996
0.75	0.773	1.75	0.960	2.70	0.997
0.80	0.788	1.80	0.964	2.75	0.997
0.85	0.802	1.85	0.968	2.80	0.997
0.90	0.816	1.90	0.971	2.85	0.998
0.95	0.829	1.95	0.974	2.90	0.998
1.00	0.841	1.960	0.975	2.95	0.998
1.05	0.853	2.00	0.977	3.00	0.999