

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 1998/99

Ogos/September 1998

MAT 222 - Persamaan Pembezaan II

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA soalan di dalam DUA halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

- 1.(a) Tunjukkan bahawa $\underline{x}_1 = e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ dan $\underline{x}_2 = e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ memenuhi persamaan pembezaan $\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$.

Seterusnya berikan penyelesaian am bagi persamaan pembezaan

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} \text{ di mana } \underline{x} = \underline{x}(t).$$

(30 markah)

- (b) (i) Cari nilai pemalar-pemalar a, b, c, d, f, g supaya $\begin{pmatrix} a \tan t + bt + c \\ d \tan t + ft + g \end{pmatrix}$ menjadi suatu penyelesaian khusus kepada persamaan pembezaan

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} \sec^2 t - \tan t - t \\ \tan t - t + 1 \end{pmatrix} \quad \dots(A)$$

(30 markah)

- (ii) Cari penyelesaian kepada persamaan pembezaan (A) diberi syarat awal $\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(10 markah)

- (c) Dengan menulis $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + I_2$, nilaikan matriks eksponen $e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} t}$.
- $$\left[\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots, \cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right]$$

(30 markah)

...2/-

2.(a) Diberi PPS

$$3x^2 u_x + (2-y) u_y = 0 \quad \dots(B)$$

- (i) Jika $u(x, y) = F[ax^m + b \ln |2-y|]$ merupakan penyelesaian am kepada (B) cari nilai pemalar m , dan seterusnya tunjukkan bahawa pemalar-pemalar a dan b memenuhi persamaan

$$3a + b = 0 \quad \dots(C)$$

(30 markah)

- (ii) Bincangkan kes $a = 0$ dalam penyelesaian di atas.

(10 markah)

- (iii) Pilih sebarang pasangan nilai pemalar tak sifar (a, b) yang memenuhi (C) dan dengan itu tunjukkan bahawa penyelesaian am bagi (B) boleh ditulis sebagai

$$u(x, y) = G[(2-y)^3 / e^{1/x}].$$

(30 markah)

(b) Selesaikan masalah nilai awal

$$3x^2 u_x + (2-y) u_y = (2-y)^2 (9x^2 \sec^2 3x - 2 \tan 3x),$$

$$u(x, 1) = x + \tan 3x$$

(30 markah)

3. Selesaikan masalah Dirichlet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = \frac{\pi^3}{8} x(1-x)$$

dengan menggunakan kaedah pemisahan pembolehubah.

(100 markah)

-ooo0ooo-