UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1993/94

April 1994

MAT 220 - Persamaan Pembezaan I

[Masa: 3 Jam]

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Selesaikan persamaan-persamaan berikut:

(i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^4}$,

(ii) $(1 - xy + x^2y^2)\, dx + (x^3y - x^2)\, dy = 0$,

(iii) $y = 3x \dfrac{dy}{dx} + 6y^2 (\dfrac{dy}{dx})^2$.

(60/100)

(b) Dapatkan tiga faktor pengamir dalam bentuk

$$F(x,y) = x^m y^n$$

bagi persamaan

$$x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 0 ,$$

dan seterusnya, tuliskan penyelesaian am bagi persamaan tersebut.

(20/100)

(c) Gunakan kaedah penghampiran berturut-turut Picard pada masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \quad , \quad y(o) = 1$$

Tunjukkan bahawa jujukan $y_n(x)$ yang didapati menuju ke e^{-x^2} apabila $n \to \infty$.

(20/100)

... 2/-

2. (a) (i) Tunjukkan persamaan

$$y'' + ay' + by = 0,$$

di mana a, b adalah pemalar, mempunyai dua penyelesaian $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ yang tak bersandar secara linear yang boleh didapati seperti berikut:

Katakan r_1, r_2 adalah dua punca persamaan cirian

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Jika r_1, r_2 nyata dan berbeza, maka

$$u_1(x) = e^{r_1 x}, \quad u_2(x) = e^{r_2 x}.$$

Jika $r_1 = r_2 = \alpha$ (katakan), maka

$$u_1(x) = e^{\alpha x}, \quad u_2(x) = xe^{\alpha x}.$$

Jika $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ adalah konjugat kompleks, maka

$$u_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad u_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

(ii) Katakan $u_1(x)$, $u_2(x)$ adalah penyelesaian yang diberi dalam bahagian (i). Tunjukkan bahawa setiap penyelesaian $\varnothing(x)$ bagi $y'' + ay' + b = 0$ boleh ditulis sebagai

$$\varnothing(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$$

di mana c_1 dan c_2 adalah pemalar.

(60/100)

(b) Semakkan bahawa $y_1 = \sin x / \sqrt{x}$, $0 < x < \pi$ adalah suatu penyelesaian bagi persamaan

$$4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + (4x^2 - 1)y = 0$$

Selesaikan persamaan tersebut.

(20/100)

(c) Selesaikan persamaan

$$y'' + y = x(1 + \sin x)$$

(20/100)

3. (a) Cari nilai a dan b supaya $y_1 = ax^b$ adalah suatu penyelesaian bagi persamaan

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x\cos x)y + 2(\cos x)y^2.$$

Selesaikan persamaan tersebut.

(30/100)

(b) Selesaikan persamaan

$$x^3(\sin x)y''' - (3x^2 \sin x + x^3 \cos x)y'' + (6x\sin x + 2x^2 \cos x)y' - (6\sin x + 2x\cos x)y = 0$$

dengan menggunakan penggantian $y = vx$.

(30/100)

(c) (i) Diberi

$$y'' + a(y')^2 + f(y) = 0$$

di mana a adalah pemalar. Tunjukkan bahawa penggantian pembolehubah

$$(y')^2 = v$$

menukar persamaan tersebut kepada

$$\frac{dv}{dy} + 2av + 2f(y) = 0.$$

(ii) Selesaikan persamaan

$$y'' + 3(y')^2 + 4y^2 = 2.$$

(40/100)

4. (a) Dapatkan dua penyelesaian bagi masalah nilai awal

$$y' = y^{2/3}, \quad y(1) = 1$$

Adakah ini bercanggah dengan Teorem Kewujudan dan Keunikan? Terangkan.

(25/100)

(b) Selesaikan persamaan

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 3x.$$

(25/100)

(c) Gunakan kaedah perubahan paramater untuk mencari suatu penyelesaian khusus bagi sistem tak homogan, dan seterusnya dapatkan penyelesaian am:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$

(50/100)

- oooOOooo -