UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2000/2001

April/Mei 2001

MAT 202 – Pengantar Analisis

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua **EMPAT** soalan. Semua soalan membawa markah yang sama.

...2/-

1.(a) Diberi set $A = \{p, q, r\}$. Adakah set hasil darab $A \times I^+$ terbilangkan? Berikan alasan.

(b) (i) Andaikan S adalah subset nombor nyata yang bukan kosong dan $\sup S = a$. Buktikan bahawa wujud suatu jujukan $\{x_n\} \subset S$ yang menumpu ke a.

(ii) Andaikan set $S = \left\{ (-1)^n \dfrac{n-1}{n} \,\middle|\, n \in I^+ \right\}$. Dapatkan $\inf S$ dan $\sup S$. Berikan satu jujukan dalam S yang menumpu ke $\sup S$.

(c) Andaikan set S seperti yang diberikan dalam bahagian (b)(ii) di atas dan $g : B \to S$ suatu fungsi. Jika fungsi g bersifat satu dengan satu, adakah set B terbilangkan? Berikan alasan.

2.(a) Diberi $A = \left\{ \dfrac{n}{2n+1} \,\middle|\, n \in I^+ \right\} \cup [2, 4)$.

(i) Cari A°.
(ii) Cari A'.
(iii) Adakah set A tertutup? Berikan alasan.
(iv) Dapatkan set B sebagai set tertutup yang terkecil yang mengandungi set A.

(b) Fungsi $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ selanjar pada $[a, b]$ dan fungsi $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ ditakrifkan sebagai

$$F(x) = \int_a^x h(t)\, dt,$$

$$G(x) = \int_x^b h(t)\, dt, \quad x \in [a, b].$$

(i) Dapatkan $F'(x)$ dan $G'(x)$.
(ii) Jika $F(x) = G(x), \ \forall x \in [a, b]$, buktikan bahawa $h(x) = 0, \ \forall x \in [a, b]$.

(c) Andaikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selanjar pada $\mathbb{R}$, set T tertutup pada $\mathbb{R}$ dan $S = f^{-1}(T)$.

(i) Adakah set S tertutup?
(ii) Jika jujukan $\{a_n\} \subset S$ menumpu ke a, buktikan bahawa $a \in S$.

3.(a) Jujukan $\{a_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$a_1 = 6,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + a_n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

...3/-

(i) Tunjukkan bahawa $a_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \cdots$

(ii) Tunjukkan bahawa jujukan $\{a_n\}$ menyusut.

(iii) Adakah jujukan $\{a_n\}$ menumpu? Berikan alasan.

Jika ya, dapatkan $\underset{n\to\infty}{had}\ a_n$.

(iv) Dapatkan $\inf\{a_n\}$ dan $\sup\{a_n\}$.

(b) (i) Andaikan $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selanjar pada $a \in \mathbb{R}$ dan $h(a) > 0$. Tunjukkan bahawa wujud $\delta > 0$ dan $K > 0$ supaya

$$h(x) > K, \quad \forall x \in J(a;\delta).$$

(ii) Diberi fungsi $f, g : [c, d] \to \mathbb{R}$ adalah selanjar dan $f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [c, d]$. Jika terdapat $a \in [c, d]$ dengan $f(a) < g(a)$, buktikan bahawa

$$\int_c^d f(x)dx < \int_c^d g(x)dx.$$

4. Nyatakan sama ada setiap pernyataan berikut benar atau salah. Jika pernyataan itu benar buktikannya dan jika pernyataan itu salah berikan satu contoh untuk menunjukkan ia salah.

(i) Set S adalah subset nombor nyata yang tak kosong. Maka $\sup S$ jika wujud adalah unik.

(ii) $\{I_n\}$ merupakan suatu jujukan selang dengan $I_1 \supset I_2 \supset \cdots I_n \supset \cdots$. Maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi$.

(iii) $\{f_n\}$ adalah suatu jujukan fungsi yang menumpu pada $[a, b]$ ke fungsi f. Jika setiap fungsi $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah selanjar pada $[a, b]$, maka f juga selanjar pada $[a, b]$.

(iv) $\{a_n\}$ adalah suatu jujukan dalam $\mathbb{R}$ dan $\{b_n\}$ jujukan yang ditakrifkan sebagai

$$b_n = (a_n)^2, \quad n \in I^+.$$

Jika $\{a_n\}$ adalah jujukan Cauchy, maka $\{b_n\}$ ialah juga jujukan Cauchy.

- ooo O ooo -