UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1993/94

April 1994

MAT 202 - Pengantar Analisis

[Masa: 3 Jam]

Jawab kesemua **EMPAT (4)** soalan.

1. (a) $M_{2\times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$ adalah suatu set matriks. Hubungan H ditakrifkan atas $M_{2\times 1}$ seperti yang berikut.

Bagi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in M_{2\times 1}$,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow ac \geq 0$$

Tentukan sama ada H adalah refleksif, simetri dan transitif.

Juga cari $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right] H$.

(b) (i) Tunjukkan bahawa set Z adalah terbilangkan.

(ii) Diberi fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Adakah set f(Q) terbilangkan? Berikan alasan.

(iii) Katakan $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$, di mana I suatu set pengindeks, adalah suatu himpunan set-set. Jika setiap set A_α adalah terbilangkan, maka $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ terbilangkan juga."

Pertimbangkan pernyataan di atas. Jika pernyataan di atas benar buktinya; jika ia tidak benar, sangkalkannya dengan memberikan satu contoh lawan.

(c) (i) Katakan $A, B \subseteq \mathbb{R}$.
Buktikan bahawa $(A \cap B)^0 = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$.

(ii) Katakan $A \subseteq \mathbb{R}$.
Buktikan bahawa $(A')' \subseteq A'$.
Adakah $(A')' = A'$? Berikan alasan.

(100/100)

2. (a) Jujukan $\{a_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$a_1 = 5 \; ,$$
$$a_{n+1} = a_n + \frac{4}{7^n} \quad , n \geq 1.$$

(i) Tunjukkan bahawa jujukan $\{a_n\}$ menokok ekanada.

(ii) Tunjukkan bahawa $\{a_n\}$ terbatas dari bawah dan terbatas dari atas.

(iii) Cari $\inf \{a_n\}$ dan $\sup \{a_n\}$.

(iv) Adakah siri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ menumpu? Berikan alasan.

(b) $A \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ adalah selanjar secara seragam pada A. Buktikan bahawa jika $\{x_n\} \subseteq A$ adalah suatu jujukan Cauchy, maka jujukan $\{f(x_n)\}$ adalah juga Cauchy.

(c) Katakan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang selanjar. Tentukan sama ada set-set yang berikut adalah terbuka atau tertutup. Berikan alasan.

(i) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 1\}$

(ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$

(d) $\mathbb{R}^+$ ialah set semua nombor nyata yang positif. Diberi jujukan $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$ dan $\{y_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$. Jika jujukan $\{x_n\}$ mencapah tetapi jujukan $\{y_n\}$ dan jujukan $\{x_n y_n\}$ menumpu, tunjukkan bahawa $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$.

(100/100)

3. (a) Jika $x \in \mathbb{R}$ dan $x > \varepsilon > 0$, tunjukkan bahawa terdapat hanya bilangan terhingga $n \in \mathbb{N}$ supaya $\frac{1}{n} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

(b) Katakan $D \subseteq \mathbb{R}$ dan $f, g : D \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang selanjar. Buktikan bahawa

(i) fungsi $|f| : D \to \mathbb{R}$

$$|f|(x) = |f(x)| \ , \ x \in D,$$

juga selanjar.

(ii) fungsi $h : D \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \text{maks } \{f(x),\ g(x)\}, \quad x \in D,$$

juga selanjar.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi yang selanjar dan $A \subseteq \mathbb{R}$.

(i) Buktikan bahawa $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(ii) Jika A adalah tumpat dalam $\mathbb{R}$, iaitu $\overline{A} = \mathbb{R}$, dan fungsi f adalah keseluruh, tunjukkan bahawa f(A) juga tumpat dalam $\mathbb{R}$.

(iii) Jika dalam bahagian (ii), sifat f keseluruh digugur, maka (ii) tidak benar lagi. Berikan satu contoh untuk menunjukkannya, iaitu berikan satu contoh di mana $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi yang selanjar dan $A \subseteq \mathbb{R}$ adalah tumpat dalam $\mathbb{R}$, tetapi f(A) tidak tumpat dalam $\mathbb{R}$.

(100/100)

4. (a) Diberi set $S = \left\{ \frac{1}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup (5,\ 6) \cup \mathbb{N}$.

(i) Cari inf S dan sup S, jika wujud.

(ii) Cari semua titik had S.

(iii) Cari semua titik pedalaman S.

(iv) Adakah S tertutup dan terbuka? Berikan alasan.

(b) S adalah suatu subset dari $\mathbb{R}$ yang bukan kosong dan terbatas dari atas.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ batas atas } S \}$.
Tunjukkan bahawa sup S = inf A.

(c) Diberi $f_n(x) = (\sin x)^n$, $x \in [0, 2\pi]$

(i) Cari $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

(ii) Tunjukkan bahawa jujukan fungsi $\{f_n(x)\}$ menumpu secara seragam pada $[0, \frac{\pi}{4}]$ tetapi tidak menumpu secara seragam pada $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(100/100)

-oooOOooo-