

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1994/95

Jun 1995

MAT 201 Kalkulus Lanjutan

Masa : [3 jam]

Jawab kesemua **EMPAT (4)** soalan.

1. (a) Lakarkan lengkung $r = 2 + \cos \theta$.
Jika D merupakan rantau yang terletak di dalam lengkung $r = 2 + \cos \theta$
tetapi di luar bulatan $r = 2$, cari luas D. (35/100)

- (b) Fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ ditakrifkan secara tersirat dengan persamaan

$$5x^4 + ye^y - 2u^2y^2 - 10 = 0$$
$$xy + v^3y - 8x = 0.$$

Cari $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$.

(20/100)

- (c) (i) Jika $f(x) = \frac{1}{1-x}$ untuk $|x| < 1$, tunjukkan bahawa siri Taylor
bagi fungsi f di sekeliling titik 0 ialah $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

- (ii) Cari fungsi yang diwakili oleh siri kuasa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}$ untuk
 $|x| < 1$. (45/100)

...2/-

2. (a) Tentukan sama ada kamiran tak wajar yang berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^3}$

(ii) $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$

(iii) $\int_2^{\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^4 - 7x + 6} dx$

(30/100)

- (b) Cari selang penumpuan untuk siri kuasa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (x - 2)^n}{n!}$.

(20/100)

- (c) Diberi $F(x, t) = a e^{-bx} \sin(ct - bx)$, di mana a , b dan c ialah pemalar.

(i) Cari $\frac{\partial F}{\partial t}$ dan $\frac{\partial F}{\partial x}$.

(ii) Tunjukkan bahawa $\frac{\partial F}{\partial t} = k \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ untuk suatu pemalar k .

(30/100)

- (d) Jika fungsi $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, tentukan sama ada f selanjar pada $(0, 0)$.

(20/100)

3. (a) Cari had yang berikut

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + 3n} - n^2)$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin(5n^3)}{7n^2 + 4}$$

(20/100)

(b) Tentukan sama ada siri nombor yang berikut menumpu atau mencapah.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{5n} \right)^n$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{2n^7 + 3}$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{3n^2 + 8}$$

(30/100)

(c) Tunjukkan bahawa persamaan $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ dijelmakan ke persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ dengan penukaran pembolehubah } r = y - x, s = x + y.$$

(20/100)

(d) Cari nilai ekstremum bagi fungsi $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ pada elips yang merupakan persilangan di antara silinder $x^2 + y^2 = 2$ dan satah $y + z = 1$.

(30/100)

4. (a) Jujukan $\{a_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$a_n = \ln n - \ln(n+2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Tunjukkan $\{a_n\}$ menokok

...4/-

(ii) Tunjukkan $\{a_n\}$ terbatas

(iii) Cari $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(35/100)

(b) Nilai kamiran yang berikut:

(i) $\iint_A 4x \, dx \, dy$ di mana A ialah rantau yang dibatasi oleh paksi x, paksi y, garis $x = 1$ dan lengkung $y = 2 + x^2$.

(ii) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{10x}{\sqrt{1+y^5}} \, dy \, dx$.

(iii) $\iiint_V \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz$

di mana $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$.

(65/100)