UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 1994 / 95

Jun 1995

MAT 114 - ALJABAR LINEAR

Masa : 3 jam

Jawab **semua** soalan.

1. (a) Katakan A, B, $\in M_{n\times n}$ dan $|A| = 1/2$. Jika

$$A \xrightarrow{R_2^1} B_1 \xrightarrow{R_1(-2)} B_2 \xrightarrow{R_3^1(10)} B ,$$

Cari nilai $|B|$.

(20/100)

(b) Cari nilai penentu bagi matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(20/100)

(c) Tunjukkan bahawa penentu berikut sama dengan sifar.

$$\begin{vmatrix} b+c & (b+c)(b^2+c^2) & 1 \\ c+a & (c+a)(c^2+a^2) & 1 \\ a+b & (a+b)(a^2+b^2) & 1 \end{vmatrix}$$

(20/100)

(d) Katakan

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & \ldots a_1 a_n \\ a_2 a_1 & 1+a_2^2 & a_2 a_3 & \ldots a_2 a_n \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n a_1 & a_n a_n & a_n a_3 & 1+a_n^2 \end{vmatrix} , \quad n = 2, 3, \ldots$$

Tunjukkan bahawa

$$D_n = D_{n-1} + a_n^2 \quad , \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Dengan ini, deduksikan bahawa

$$D_n = 1 + a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 .$$

(40/100)

2. (a) Diberi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dapatkan songsang bagi matriks A, dan tuliskan A sebagai suatu hasildarab MBP.

(25/100)

(b) Selesaikan setiap sistem persamaan yang berikut :

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = 0$.

(35/100)

(c) Katakan $A, B \in M_{n\times n}$. Buktikan atau sangkalkan setiap pernyataan berikut :

(i) $r(A) < n \Rightarrow r(AB) < n$,

(ii) $r(A) = n \Rightarrow r(AB) = r(B)$,

(iii) $A^2 = 0 \Rightarrow I - A$ tak singular ,

(iv) $r(A) = r(B) \Rightarrow |A| = |B|$.

(40/100)

3. (a) Katakan $A \in M_{nxn}$ tak singular dan

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 & \\ 0 & & \ddots c_n \end{pmatrix}.$$

Dapatkan matriks A

(15/100)

(b) Katakan

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dapatkan nilai eigen bagi

(i) B ,

(ii) B^3 ,

(iii) B^T ,

(iv) B^{-1} ,

(v) $(A \text{ adj } A)^2$,

(30/100)

(c) Buktikan bahawa

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tidak terpepenjurukan.

(15/100)

(d) Katakan $A, B \in M_{nxn}$. Buktikan atau sangkalkan

(i) Set nilai eigen bagi AB dan BA adalah sama.

(ii) Jika A serupa dengan B, maka set nilai eigen bagi A dan B adalah sama.

(iii) Jika A serupa dengan B dan A terpepenjurukan, maka B juga takpepenjurukan.

(iv) Jika α dan β adalah nilai eigen bagi A dan B masing-masing, maka $\alpha + \beta$ adalah suatu nilai eigen bagi A + B.

(40/100)

4. (a) Katakan

$$V = \{ A \in M_{nxn} \mid A^T = A \}.$$

$$W = \{ A \in M_{nxn} \mid A^T = -A \}.$$

(i) Tunjukkan bahawa

$$V,\ W,\ V \cap W,\ V + W$$

adalah subruang bagi M_{nxn}

(ii) Dapatkan suatu asas bagi setiap subruang V, W, $V \cap W$ dan $V + W$.

(40/100)

(b) Tentukan sama ada polinomial

$$p(x) = x^2 - x + 3$$

suatu unsur dan subruang yang direntangkan oleh

$$\{ x^2 + 2x + 1 \ ,\ x^2 - 2 \ ,\ x^3 + x \} \ .$$

(20/100)

(c) Dapatkan asas dan dimensi bagi ruang penyelesaian sistem persamaan berikut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(20/100)

(d) Jika {u, v, w} tak bersandarkan linear, tentukan sama ada

$$\{ u - v,\ v - w,\ w - u \}$$

bersandar linear atau tak bersandar linear.

(20/100)

- ooo000ooo -