UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1993/94

April 1994

MAT 114 - Aljabar Linear

[Masa: 3 Jam]

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) (i) Buktikan bahawa $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, bagi sebarang matriks A yang tak singular.

(20/100)

(b) Andaikan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(i) Dapatkan bentuk eselon baris terturun (b.e.b.t.) matriks A.

(ii) Tulis A^{-1} sebagai hasil darab matriks baris permulaan.

(iii) Dapatkan $(A^T)^{-1}$.

(iv) Selesaikan sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

(60/100)

(c) Tunjukkan bahawa jika matriks segiempat sama A memenuhi persamaan $A^3 + 3A^2 - 5A + I = 0$, maka A tersongsangkan.

(20/100)

...2/-

2. (a) Jika A tersongsangkan, tunjukkan bahawa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A).$$

Guna keputusan ini ataupun cara lain untuk membuktikan : Jika AX = B dan A tersongsangkan, maka

$$X = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A)B.$$

Seterusnya, dengan menggunakan rumus ini, selesaikan sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 &= 10. \end{aligned}$$

(70/100)

(b) Nyatakan syarat ke atas a, b dan c supaya sistem persamaan linear berikut merupakan sistem yang konsisten:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= a \\ 4x + 5y + 6z &= b \\ 7x + 8y + 9z &= c. \end{aligned}$$

(30/100)

3. (a) Nilaikan penentu-penentu berikut:

(i) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$,

(ii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

(20/100)

... 3/-

(b) Andaikan B sebagai matriks n x n berikut:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Buktikan bahawa $|B| = 2^{n+1} - 1$.

(30/100)

(c) Andaikan A dan B sebagai matriks n x n dan r(A) = pangkat A.

Jika A tak singular, buktikan atau sangkalkan (dengan memberi contoh lawan):

(i) $r(A + B) = r(A) + r(B)$,

(ii) $r(AB) = r(A)\, r(B)$.

(40/100)

(d) Cari pangkat A jika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

(10/100)

4. (a) Andaikan W_1 dan W_2 merupakan subruang suatu ruang vektor V. Buktikan bahawa $W_1 \cap W_2$ adalah suatu subruang kepada V.

(20/100)

(b) Andaikan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cari suatu asas subruang $W \subset R^5$ jika

$$W = \left\{ \underset{\sim}{v} : A\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0} \, , \, \underset{\sim}{v} \in R^5 \right\}.$$

(30/100)

... 4/-

(c) Andaikan

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dan $M_{2\times 2}$ = {matriks berperingkat 2 x 2}.

(i) Buktikan bahawa S merentang $M_{2\times 2}$.

(ii) Tulis $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ sebagai gabungan linear vektor dalam S.

(iii) Buktikan atau sangkalkan (dengan memberikan sebab-sebab yang jelas dan benar) bahawa:

S adalah suatu asas $M_{2\times 2}$.

(iv) Nyatakan dimensi $M_{2\times 2}$.

(50/100)

5. (a) Andaikan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Dapatkan polinomial cirian matriks A.

(ii) Nyatakan semua nilai eigen dan vektor eigen sepadanan untuk matriks A.

(iii) Adakah A terpepenjurukan? Jika ya, dapatkan matriks-matriks P dan D supaya $P^{-1}AP = D$. Jika tidak, nyatakan sebabnya.

(40/100)

(b) Andaikan A sebagai matriks n x n, tak singular dan λ merupakan nilai eigen A. Buktikan bahawa $\frac{1}{\lambda}$ adalah nilai eigen A^{-1}.

(25/100)

(c) Andaikan $\underset{\sim}{x}$ sebagai vektor eigen matriks A sepadanan dengan nilai eigen λ. Buktikan bahawa λ^n adalah nilai eigen A^n dengan $\underset{\sim}{x}$ sebagai vektor eigen sepadanan, untuk semua integer positif n.

(35/100)

- oooOOooo -