

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1997/98

Februari 1998

MAT 102 - Kalkulus Lanjutan

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT soalan di dalam EMPAT halaman yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab mana-mana **TIGA (3)** soalan sahaja. Jika lebih daripada 3 soalan dijawab, hanya 3 jawapan pertama akan diambil kira.

1. (a) Diberi

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Bincang keselajaran fungsi f .

- (b) Katakan $\phi = x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. Tunjukkan bahawa

$$x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} + z \frac{\partial \phi}{\partial z} = 3\phi.$$

- (c) Cari $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_s$ jika

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + r^2 - 2s &= 0 \\ x^3 - y^3 - r^4 + 3s^2 &= -1. \end{aligned}$$

- (d) (i) Dengan menggunakan kembangan asas bagi fungsi eksponen, dapatkan satu perwakilan siri kuasa bagi $\frac{(e^x - 1)}{x}$ dalam sebutan x .

.../2-

(ii) Dengan menggunakan keputusan dari bahagian (i), tunjukkan bahawa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

(e) Jika S ialah suatu bongkah dalam oktan pertama yang dibatasi oleh permukaan $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ dan satah-satah koordinat, kirakan kamiran ganda tiga $\iiint_S 3xyz \, dV$ dengan menggunakan koordinat sfera.

(100/100)

2. (a) Biarkan $w = e^{-xy} + e^{-xy}$.

Tunjukkan bahawa $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = (x+y)^2 w + 2(e^{xy} - e^{-xy})$.

(b) Tentukan sama ada kamiran tak wajar berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} \, dx$

(ii) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

(c) Fungsi Gamma tak lengkap, $\gamma(a, x)$, adalah ditakrifkan sebagai

$$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} \, dt, \quad x \geq 0, \quad a > 0.$$

(i) Dengan menggunakan kembangan Maclaurin bagi fungsi eksponen e^{-t} , dapatkan kembangan siri bagi $\gamma(\frac{1}{2}, x)$.

(ii) Nilaikan $\gamma(\frac{1}{2}, 1)$ dengan magnitud ralat $|E| < 10^{-4}$.

(d) Tentukan sama ada siri-siri berikut menumpu secara mutlak, menumpu secara bersyarat atau mencapah. Terangkan jawapan anda.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 + 4}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{n 3^n}$

- (e) Buktikan bahawa jika $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ menumpu, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ menumpu.

(100/100)

3. (a) Cari jejari penumpuan siri kuasa berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3x+2)}{2^n}$$

Seterusnya, tentukan nilai x di mana siri ini menumpu secara mutlak.

- (b) (i) Dengan menggunakan petua rantai, dapatkan $\frac{\partial u}{\partial r}$ jika

$$u = 3xy - 4y^2, \text{ di sini } x = 2se^r \text{ dan } y = re^{-s}.$$

- (ii) Katakan $xe^{yz} - 2ye^{xy} = 2 - 3ze^{xy}$, cari $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$.

- (c) Cari isipadu V bagi bongkah yang terletak di atas satah xy , di bawah paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$, dan di dalam silinder $r = 2 \sin \theta$. Gunakan kamiran gandadua dalam koordinat kutub.

- (d) Cari had-had berikut:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n+1) - \ln n)$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + n^2}{5^n}$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} n}$

- (e) Jika $\int_a^b f(x)dx$ menumpu, tunjukkan bahawa $\int_{-b}^{-a} f(-x)dx$ juga menumpu dan mempunyai nilai yang sama.

(100/100)

4. (a) Katakan dimensi (dalam sm.) bagi satu kotak segiempat bujur bertukar daripada 10, 7 dan 5 kepada 10.02, 6.97 dan 5.01 masing-masing. Gunakan pembeza seluruh untuk menganggar perubahan dalam isipadu kotak tersebut. Apakah perubahan sebenar dalam isipadunya?

- (b) Cari titik-titik pada bulatan $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$ yang terdekat dan terjauh dari titik (0, 0).

- (c) Tukarkan tertib kamiran berganda berikut:

$$(i) \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy dx$$

$$(ii) \int_0^3 \int_{-\sqrt{4-y}}^{y-2} f(x, y) dx dy + \int_3^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx dy$$

Bagi kedua-dua bahagian, lakarkan rantau kamirannya.

- (d) Katakan $z = f(x, y)$ dengan $x = g(t)$ dan $y = h(t)$. Dengan menganggap sifat keselanjaran yang bersesuaian bagi f , tunjukkan

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right). \end{aligned}$$

- (e) Buktikan bahawa $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ jika $0 < |x| < 1$.

(100/100)